Cofinanziato dal programma Erasmus+ dell'Unione europea

Erasmus+ 2019-1-IT02-KA101-062020 «Educating in Science 4 Humans in EU»

Anno Scolastico 2019/2020

- Lezione di Geometria Analitica

nello Spazio

Prof.ssa Giuliani Donatella

Classe 4B

Liceo Scientifico «Torelli Giacomo»

Fano (PU) Italy

Introduzione

- **Classe di riferimento**: 4ª; l'attività è stata svolta in modalità didattica a distanza, durante il periodo di lockdown causato dalla pandemia Covid-19.

- **Durata:** Il modulo didattico è della durata di 10 ore per la parte teorica. Lo svolgimento degli esercizi ed attività al computer richiedono un minimo di 8 ore

- **Obiettivi:** L'apprendimento di alcuni elementi di Geometria Analitica della Spazio è inserito nella programmazione curriculare, con la finalità di estendere le conoscenze di geometria analitica allo spazio tridimensionale, ovvero nello spazio della nostra vita reale. Questo argomento dovrebbe facilitare la descrizione analitica e lo studio di oggetti appartenenti alla realtà che ci circonda.

Metodologia Didattica

- **Metodologie Didattiche:** Si è fatto uso di materiale didattico reperito in testi cartacei e on-line
- Si è fatto ricorso anche a grafici ed esempi realizzati con GeoGebra 3D, in tal modo gli studenti hanno potuto svolgere esercizi applicativi in autonomia, verificando anche graficamente i risultati ottenuti

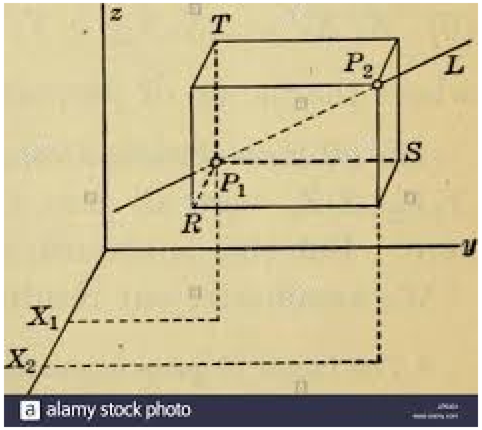
Piano delle attività e contenuti

Argomenti	Durata	
Introduzione ed Elementi di base di Geometria Analitica	2 ore	• Sistema di Riferimento 3D e coord. cartesiane • Distanza tra 2 punti • Richiami su Prodotto scalare e vettoriale
Rappresentazione di enti geometrici: vettori e piani	2 ore	• Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra vettori • Equazione del piano
Parallelismo e perpendicolarità tra piani	1 ora	• Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra piani • Posizioni reciproche tra piani
Rappresentazione di rette nello spazio	2 ore	• Equazione cartesiana e parametrica di una retta • Condizione di parallelismo e perpendicolarità
Posizione reciproche tra enti geometrici	2 ore	• Posizione reciproche rette e piani • Posizioni reciproche tra rette • Intersezioni tra rette e piani
Sfera, cilindro	1 ora	• Equazione della sfera e del cilindro

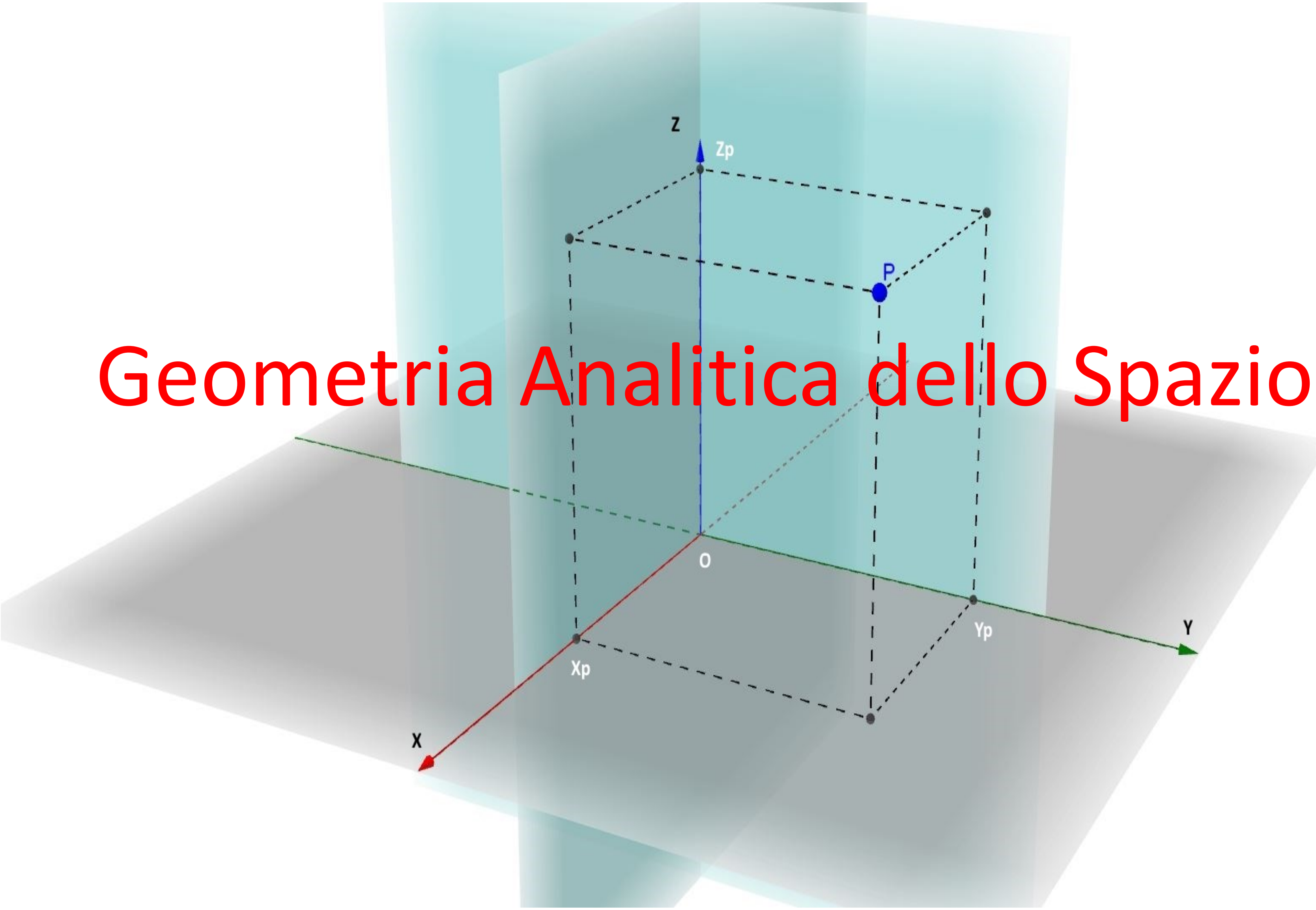
Geometria Analitica nello Spazio

- Introduzione alla Geometria Analitica nello Spazio

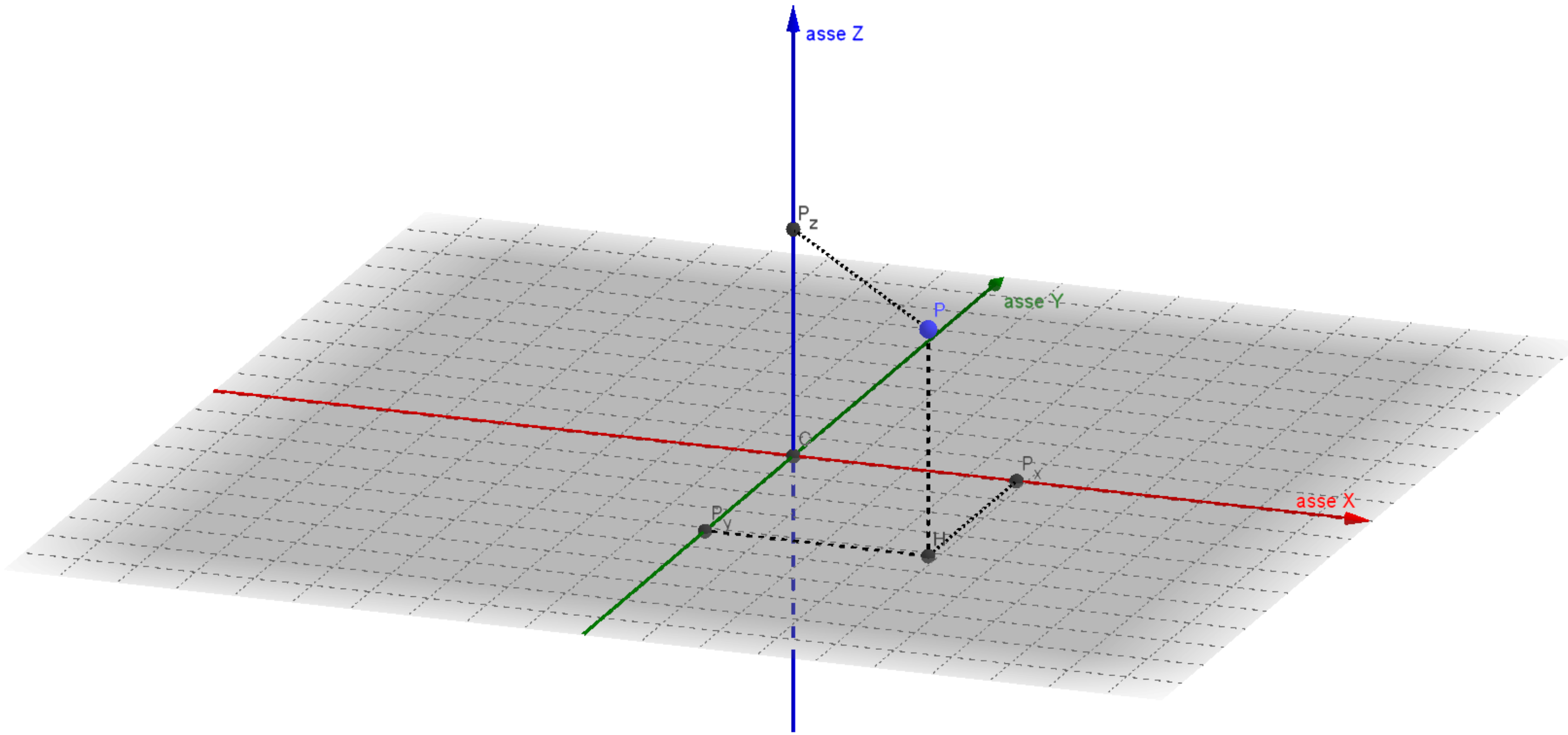
Ascoltiamo insieme!!



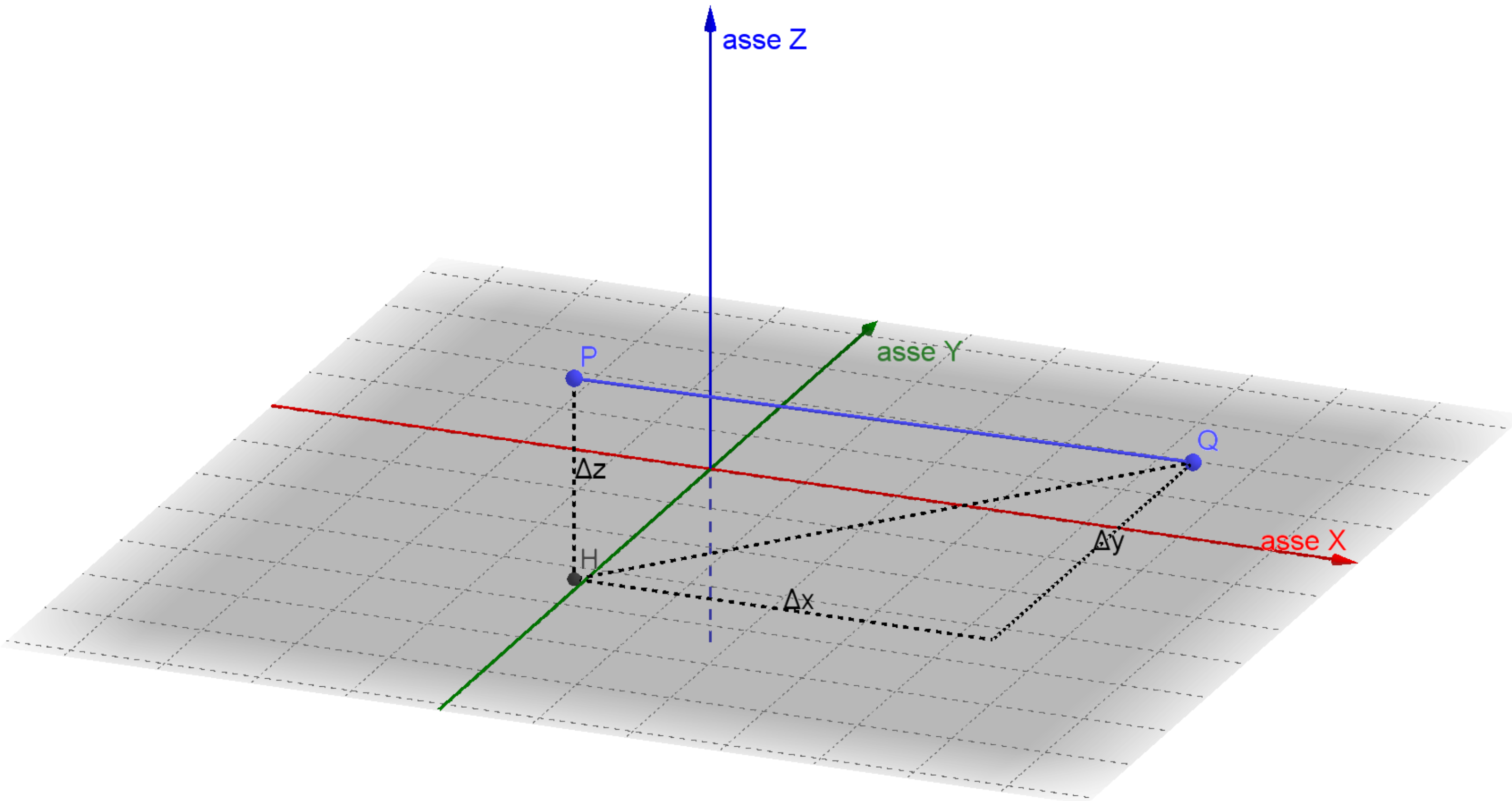
Geometria Analitica dello Spazio



Sistema Cartesiano nello Spazio



Distanza tra due punti nello spazio

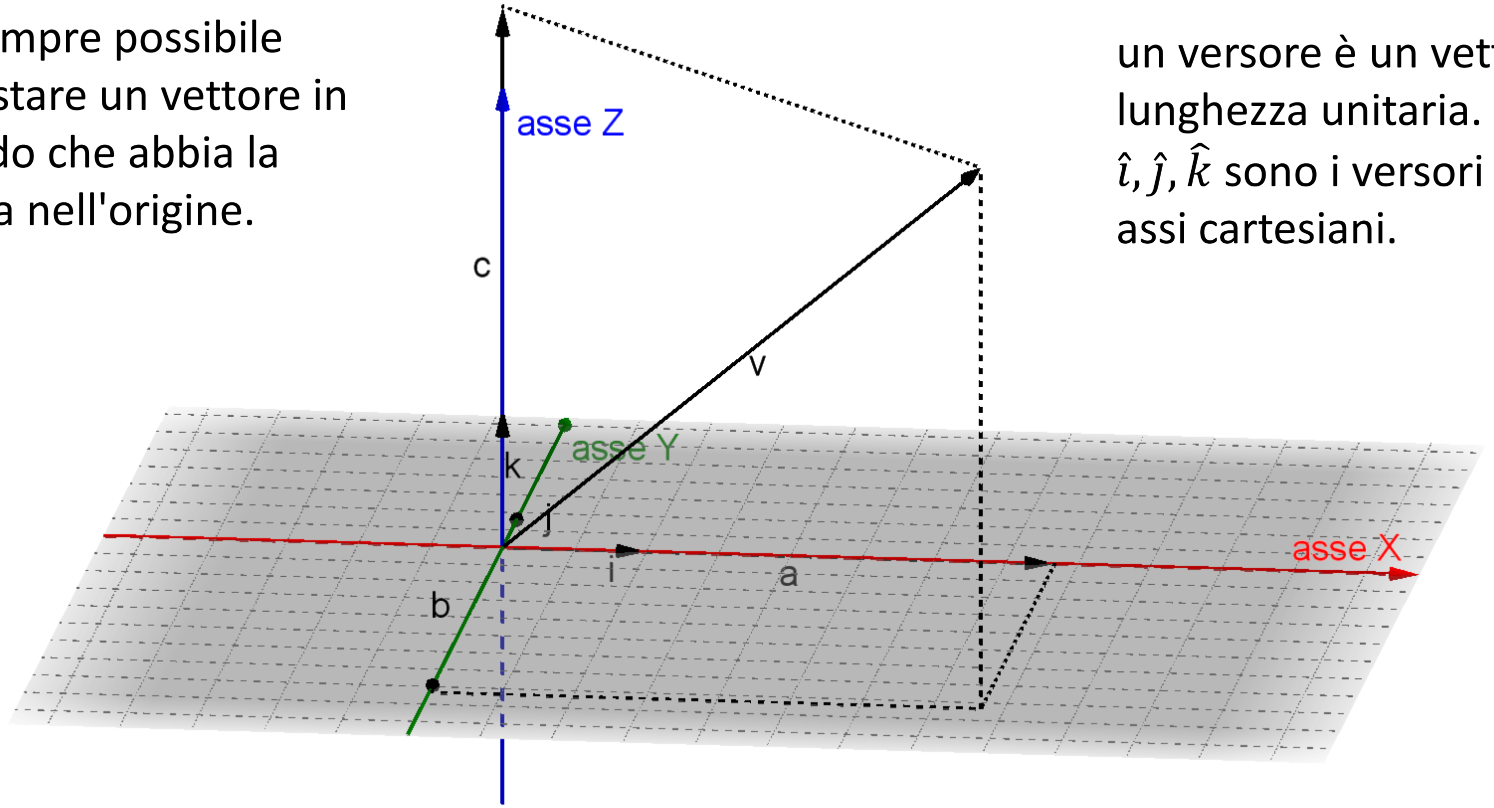


$$d = \sqrt{\overline{QH}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Il punto medio di un segmento ha coordinate $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Vettori nello spazio

È sempre possibile spostare un vettore in modo che abbia la coda nell'origine.



un versore è un vettore di lunghezza unitaria.
$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ sono i versori degli assi cartesiani.

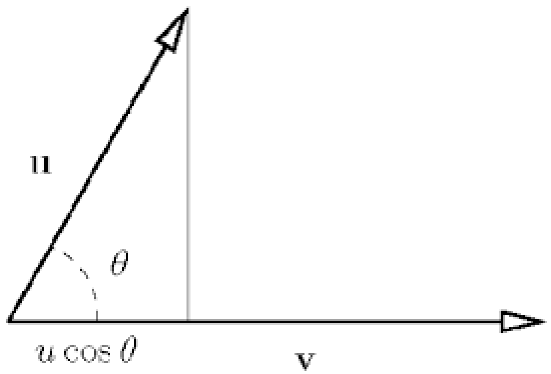
Un vettore nello spazio ha tre componenti $\vec{v} = (a; b; c) = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$

Il suo modulo è $v \equiv |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Qualunque segmento orientato è un vettore: se A(x_1;y_1;z_1) e B(x_2;y_2;z_2), il vettore $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

Prodotto scalare tra due vettori

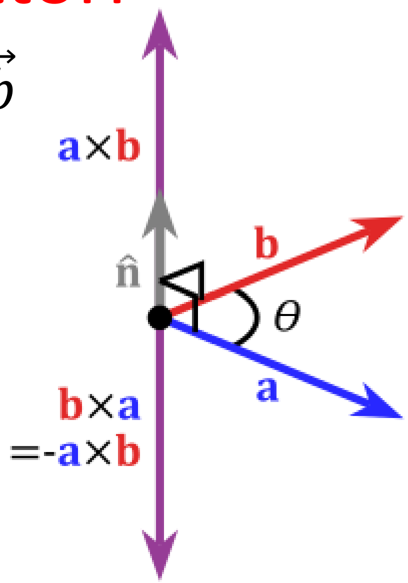
Ricordiamo che il prodotto scalare tra due vettori è il numero (scalare) pari al prodotto tra il modulo di un vettore per la proiezione del secondo vettore sulla direzione del primo: $\vec{v} \cdot \vec{u} = v\, u\, cos\theta$



Se applichiamo questa regola ai versori $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, notiamo che il prodotto scalare tra due versori identici è 1 mentre il prodotto scalare tra vettori differenti è 0.
Possiamo quindi calcolare il prodotto scalare tra due vettori utilizzando le componenti:
se $\vec{v} = a_1\hat{\imath} + b_1\hat{\jmath} + c_1\hat{k}$ e $\vec{u} = a_2\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + c_2\hat{k}$, il loro prodotto scalare sarà:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

Prodotto vettoriale tra due vettori



Ricordiamo che il prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è il vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ che ha:

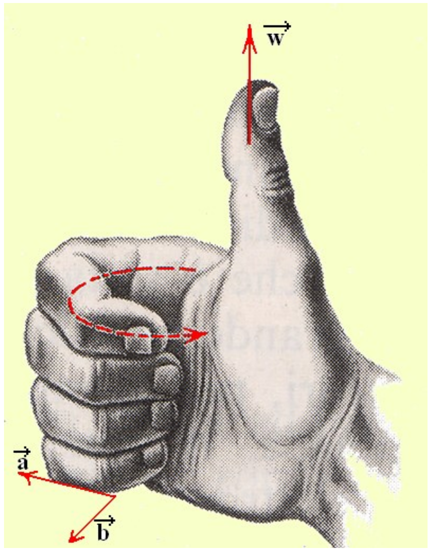
- modulo pari a $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = a\, b\, sin\theta$
- direzione perpendicolare al piano formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- verso dato dalla regola della mano destra (vedi figura)

Osserviamo che $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Se applichiamo questa regola ai versori $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, notiamo:

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

mentre il prodotto vettoriale tra due versori identici è 0.



Possiamo quindi calcolare il prodotto vettoriale tra due vettori utilizzando le componenti:

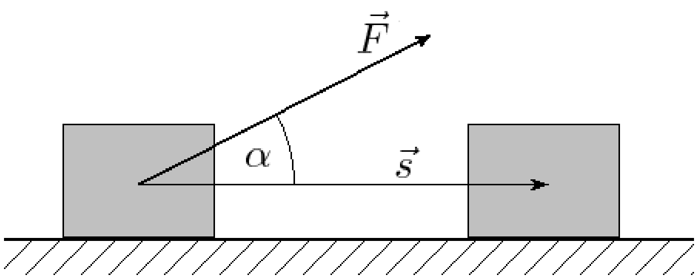
se $\vec{v} = a_1\hat{\imath} + b_1\hat{\jmath} + c_1\hat{k}$ e $\vec{u} = a_2\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + c_2\hat{k}$, il loro prodotto vettoriale sarà:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \left(a_1\hat{\imath} + b_1\hat{\jmath} + c_1\hat{k}\right) \times \left(a_2\hat{\imath} + b_2\hat{\jmath} + c_2\hat{k}\right)$$

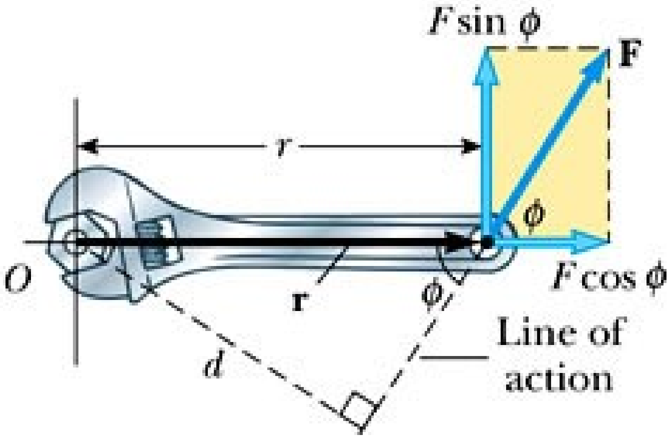
Prodotto scalare e vettoriale in Fisica

Abbiamo già incontrato in Fisica leggi con i vettori che si possono scrivere come prodotto scalare o vettoriale.

Il lavoro di una forza costante: $L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$



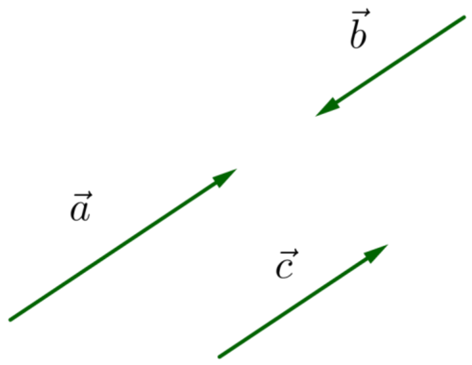
Il momento torcente di una forza: $\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F}$



Vettori paralleli e perpendicolari

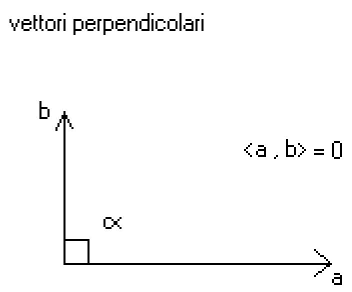
Due vettori $\vec{v} = (a_1; b_1; c_1)$ e $\vec{u} = (a_2; b_2; c_2)$ sono paralleli se $\vec{u} = k\vec{v}$, cioè se:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$ (**componenti proporzionali**)

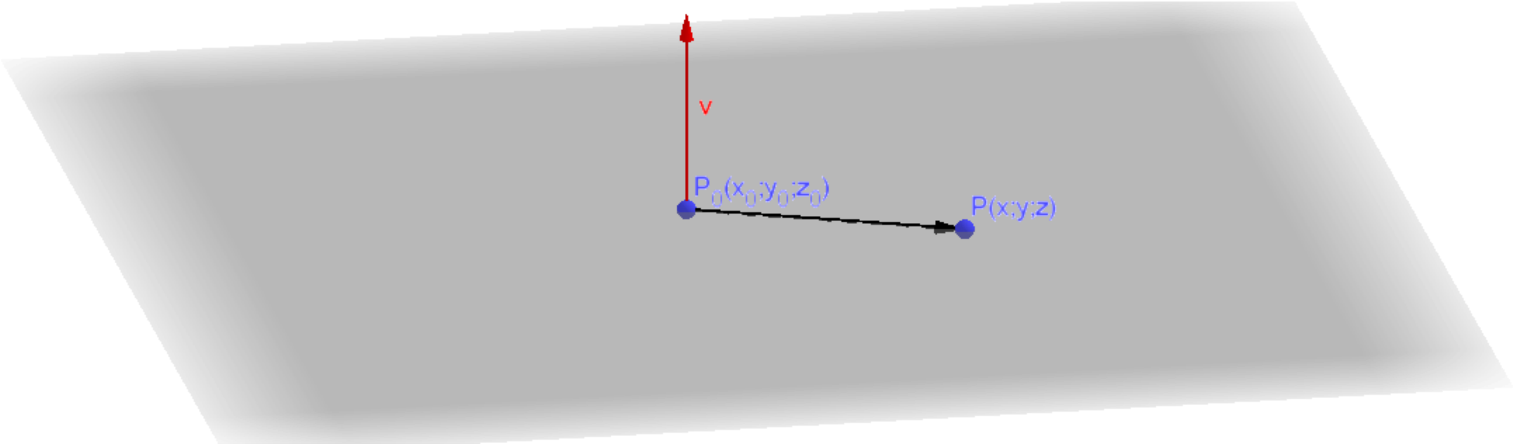


Due vettori $\vec{v} = (a_1; b_1; c_1)$ e $\vec{u} = (a_2; b_2; c_2)$ sono perpendicolari se formano un angolo di 90° e, quindi, se:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$ (**prodotto scalare nullo**)



Equazione di un piano nello spazio



Un piano è univocamente determinato da un suo punto $P_0(x_0;y_0;z_0)$ e da un qualunque vettore $\vec{v} = (a; b; c)$ perpendicolare al piano.
Un generico punto P(x;y;z;) del piano individua un vettore $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ che risulta perpendicolare a $\vec{v}$.

L'equazione di un piano per un punto noto P_0 è quindi:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$ (**Equazione per un punto noto**)

dove ***a,b,c*** vengono chiamati **parametri direttori** del piano.

Notiamo che l'equazione ottenuta è di 1° grado in *x,y,z*.
Perciò nello spazio una qualunque equazione del tipo:

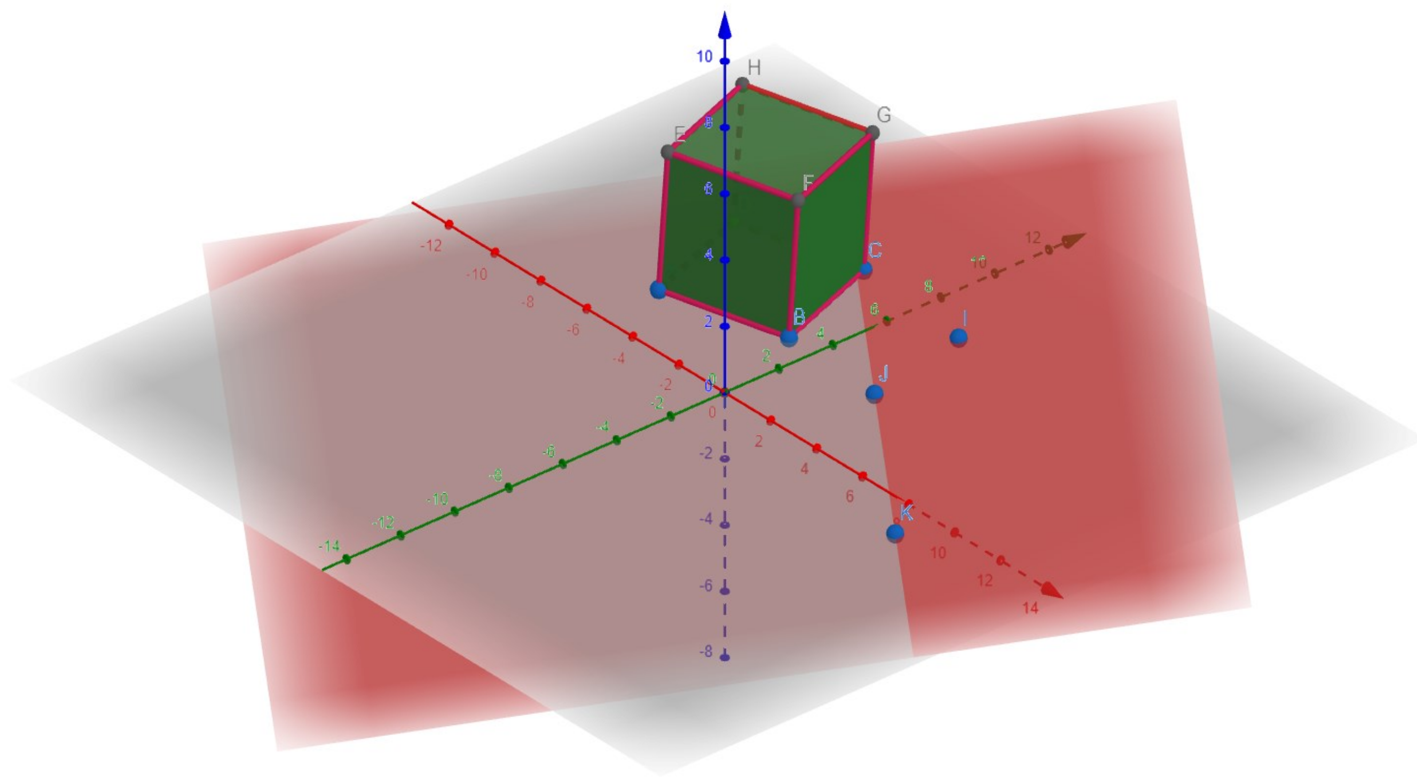
$$ax + by + cz + d = 0$$ (**Equazione cartesiana**)

rappresenta un piano che ha $\vec{v} = (a; b; c)$ come vettore perpendicolare.


"La vita è piena di
difficoltà,
vero Charlie Brown..?"
"Sì, lo è. Ma io ho maturato una
nuova filosofia:
temo un giorno alla volta"
www.ilariavisconti.it

GeoGebra 3D

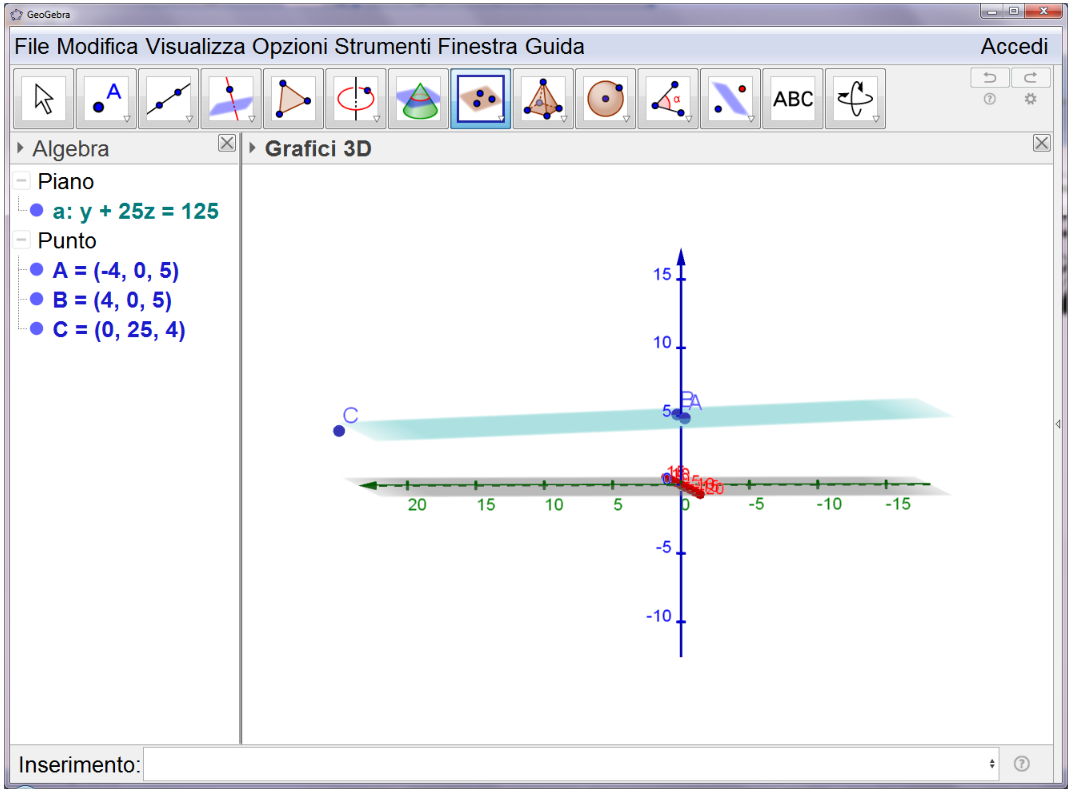
- Ora proviamo con GeoGebra 3D!



Problema 1 esame 2015 suppletiva

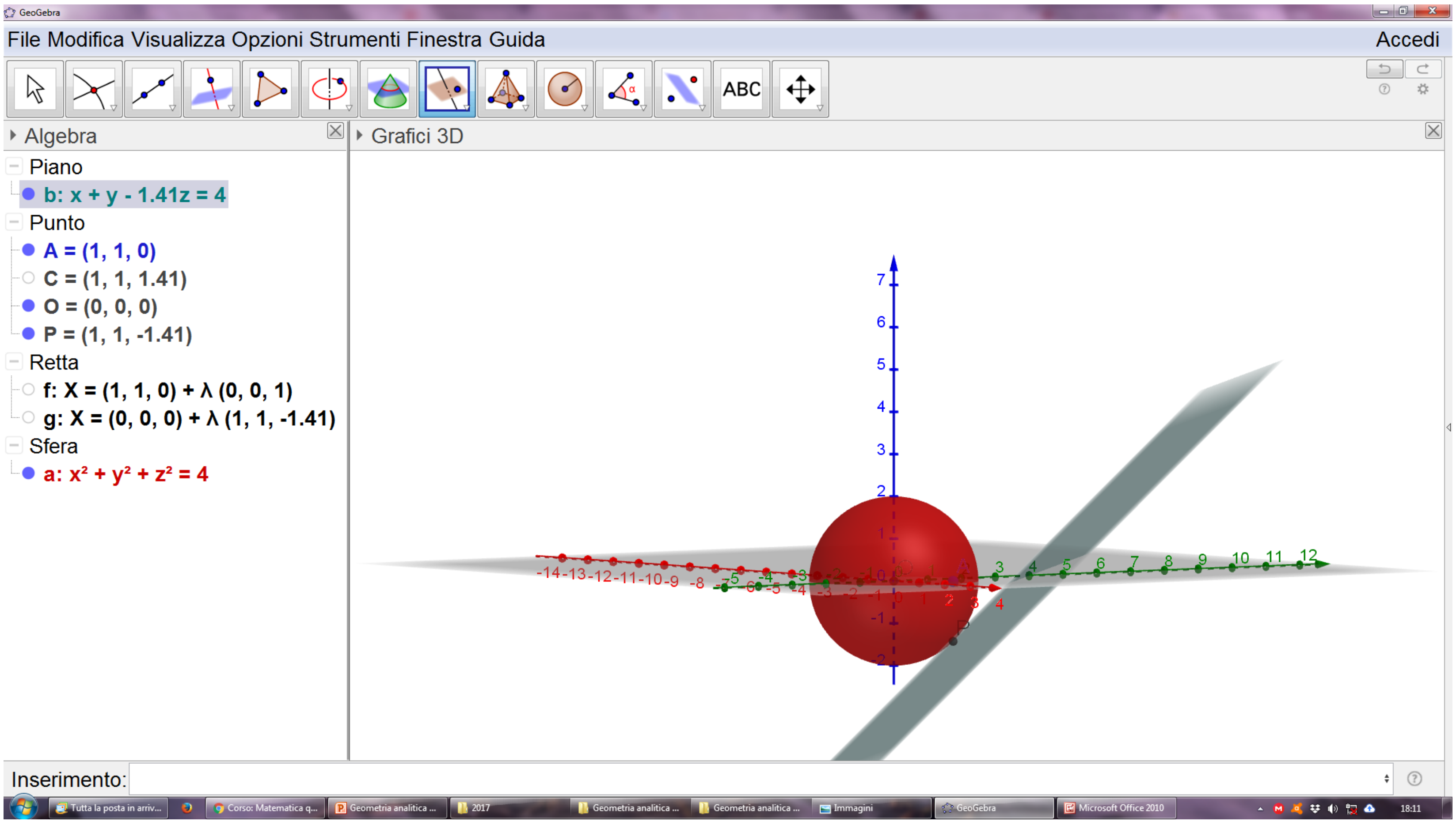
Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxyz*, tale piano deve passare per i punti (-4, 0, 5), (4, 0, 5) e (0, 25, 4), in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

- 4. Determina l'equazione del piano prescelto.

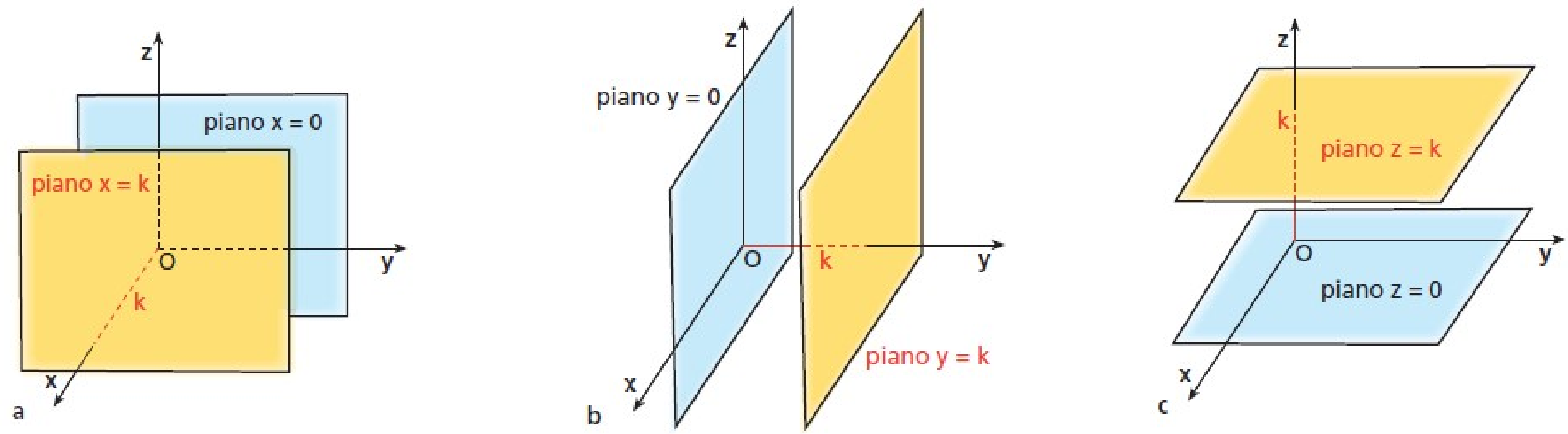


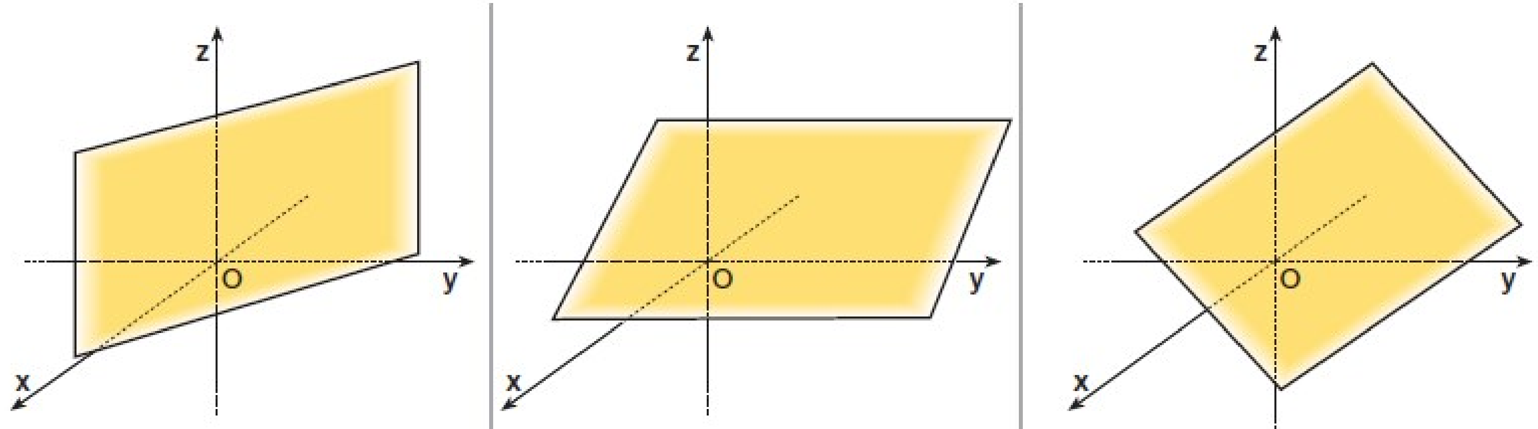
Quesito 7 simulazione 22 aprile 2015

Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate (1,1,z), con z negativa.



Piani particolari





piano $ax + by + d = 0$

a. $c = 0$: il piano è parallelo all'asse z e perpendicolare al piano Oxy.

piano $ax + cz + d = 0$

b. $b = 0$: il piano è parallelo all'asse y e perpendicolare al piano Oxz.

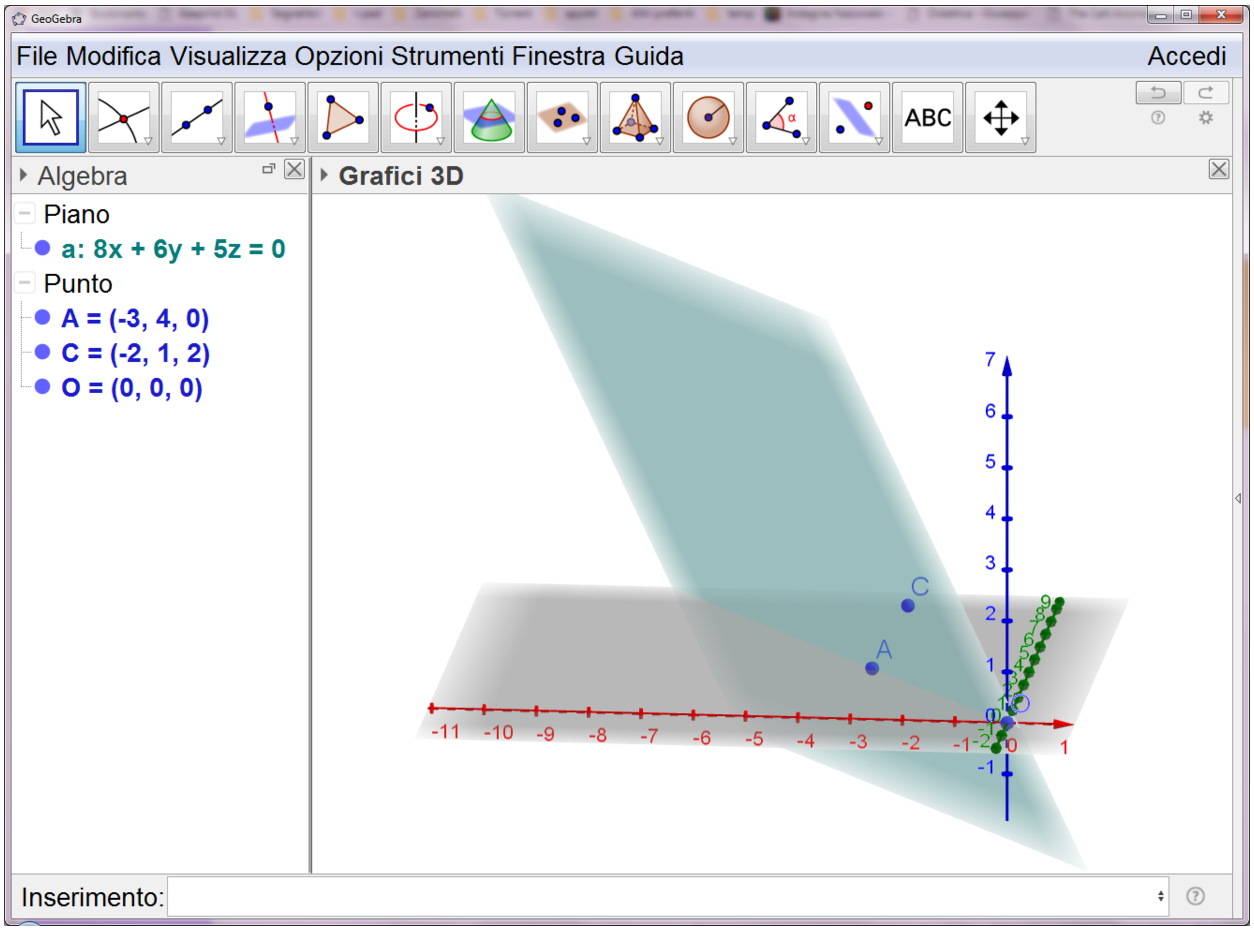
piano $by + cz + d = 0$

c. $a = 0$: il piano è parallelo all'asse x e perpendicolare al piano Oyz.

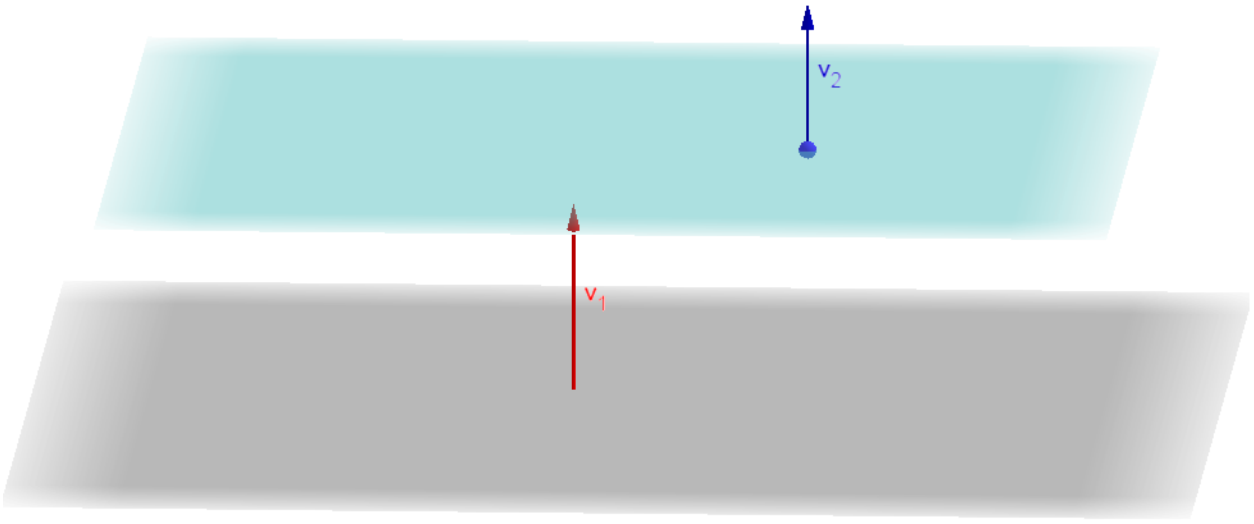
Nota: Se un piano contiene l'origine, nella sua equazione il termine noto è nullo

Quesito 4 esame 2015 suppletiva

In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz* sono dati i punti *A* (−3, 4, 0) e *C* (−2, 1, 2). I tre punti *O*, *A* e *C* giacciono su un piano *E*. Determinare l'equazione che descrive il piano *E*.



Piani paralleli



Due piani paralleli hanno vettori direzione paralleli tra loro.

Piano α:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = (a_1; b_1; c_1)$$

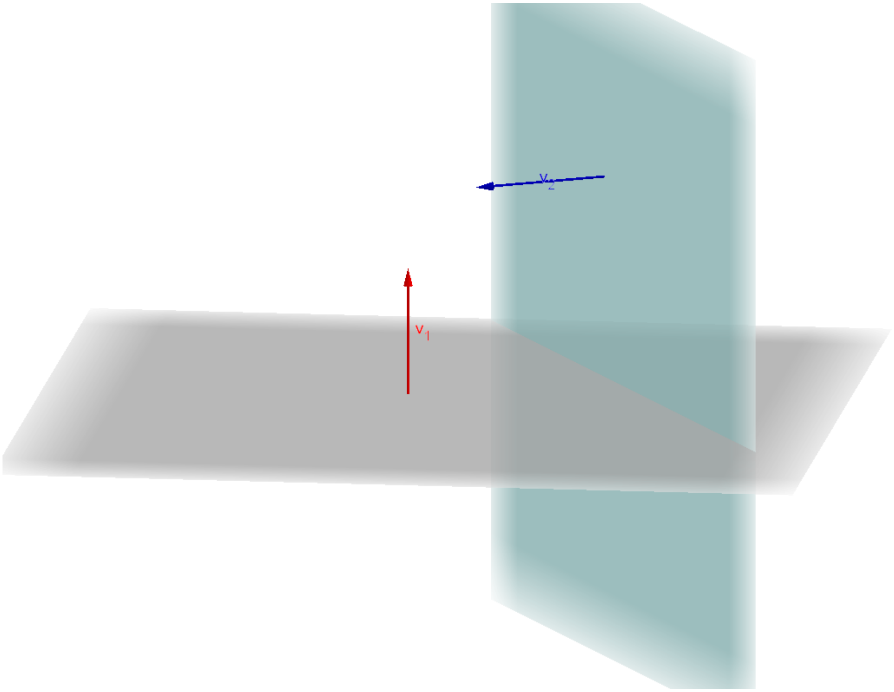
Piano β:

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = (a_2; b_2; c_2)$$

I due piani sono paralleli tra loro se:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$ (comprende il caso di piani coincidenti)

Piani perpendicolari



Due piani perpendicolari hanno vettori direzione perpendicolari tra loro.

Piano α:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = (a_1; b_1; c_1)$$

Piano β:

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = (a_2; b_2; c_2)$$

I due piani sono perpendicolari tra loro se:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

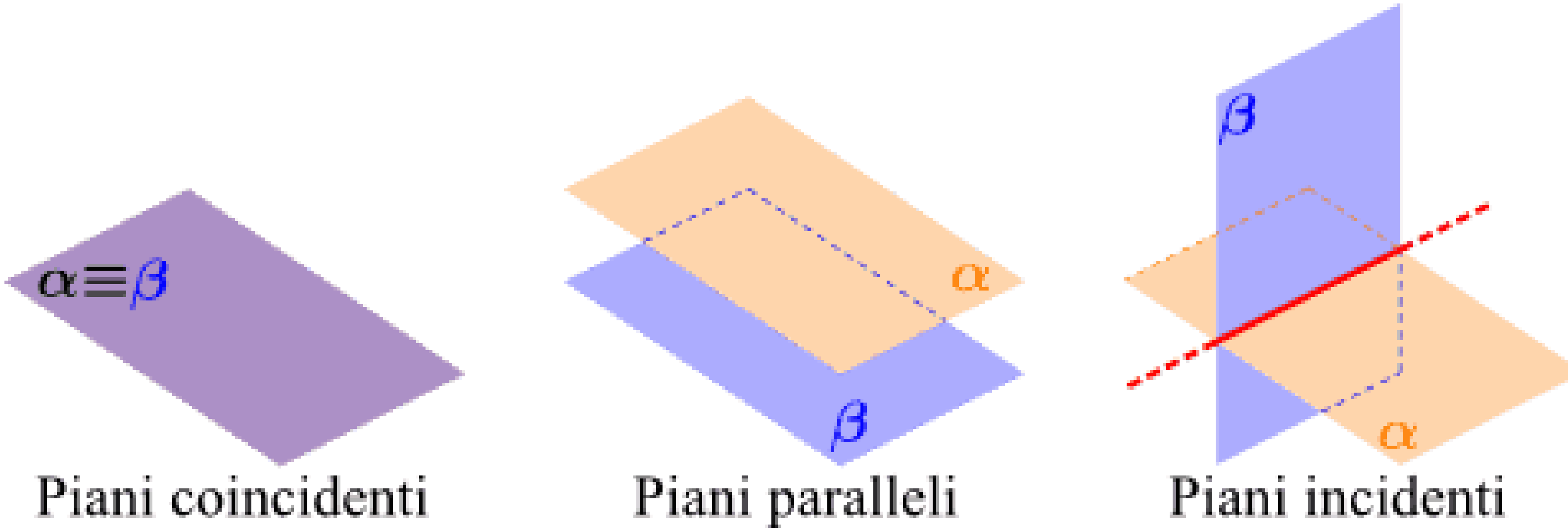
Comparazione tra rette nel piano e piani nello spazio

Rette nel piano	**Piani nello spazio**
Equazione implicita:	Equazione implicita:
$ax + by + c = 0$	$ax + by + cz + d = 0$
Equazione esplicita:	Equazione esplicita:
$y = mx + q$	$z = mx + ny + q$
r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$	α: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	β: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$
r e s parallele: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$	α e β paralleli: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$
r e s perpendicolari:	α e β perpendicolari:
$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$	$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

Piani incidenti, paralleli, coincidenti

Se conosciamo le equazioni cartesiane dei due piani possiamo metterle a sistema tra loro:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

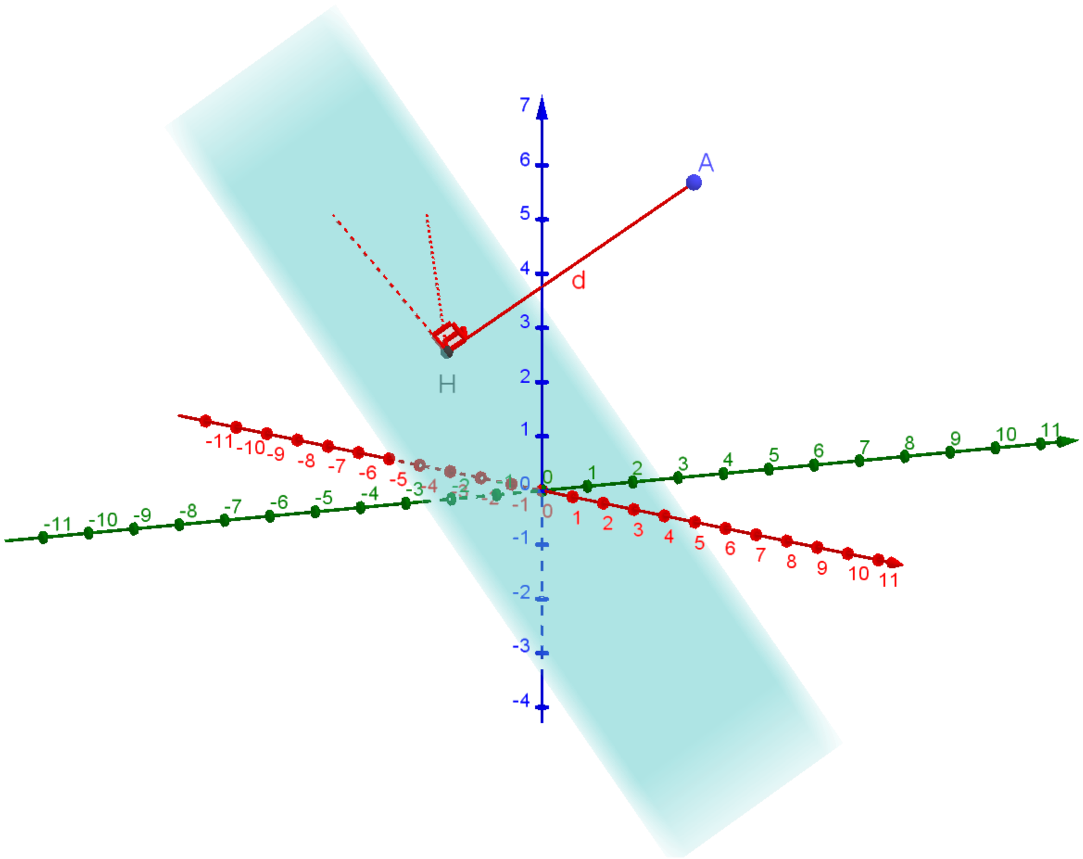


sistema con infinite soluzioni e due variabili indeterminate (le due equazioni sono proporzionali)

sistema senza soluzioni (i coefficienti di x,y,z sono proporzionali tra loro ma non con i termini noti)

sistema con infinite soluzioni e una variabile indeterminata (i coefficienti di x,y,z non sono proporzionali)

Distanza tra un punto ed un piano



È la lunghezza del segmento che congiunge il punto con il piede della perpendicolare al piano passante per quel punto.

Se il punto ha coordinate $A(x_0, y_0, z_0)$ e il piano ha equazione $ax+by+cz+d=0$

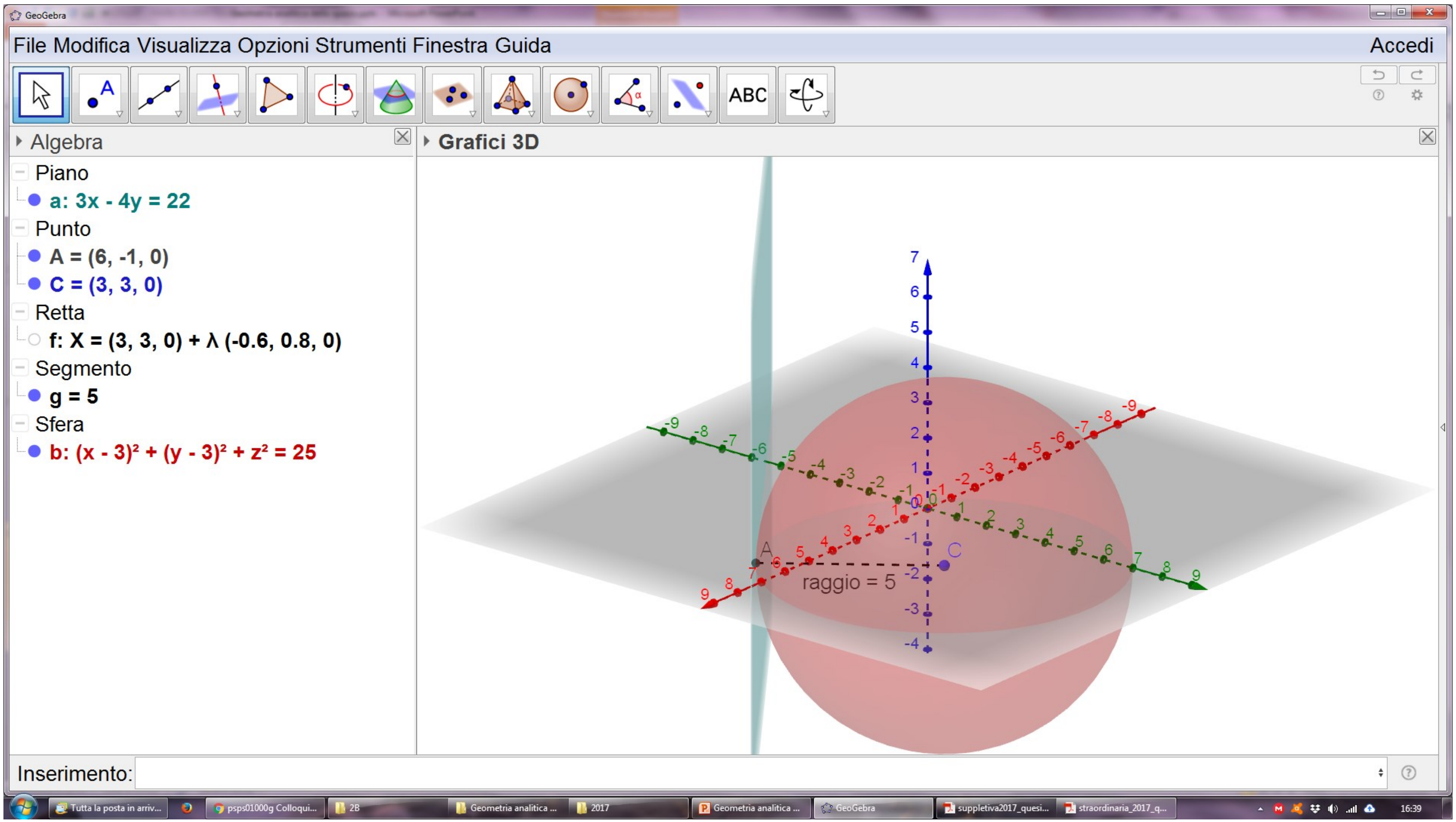
vale la formula seguente:

$$\boldsymbol{d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

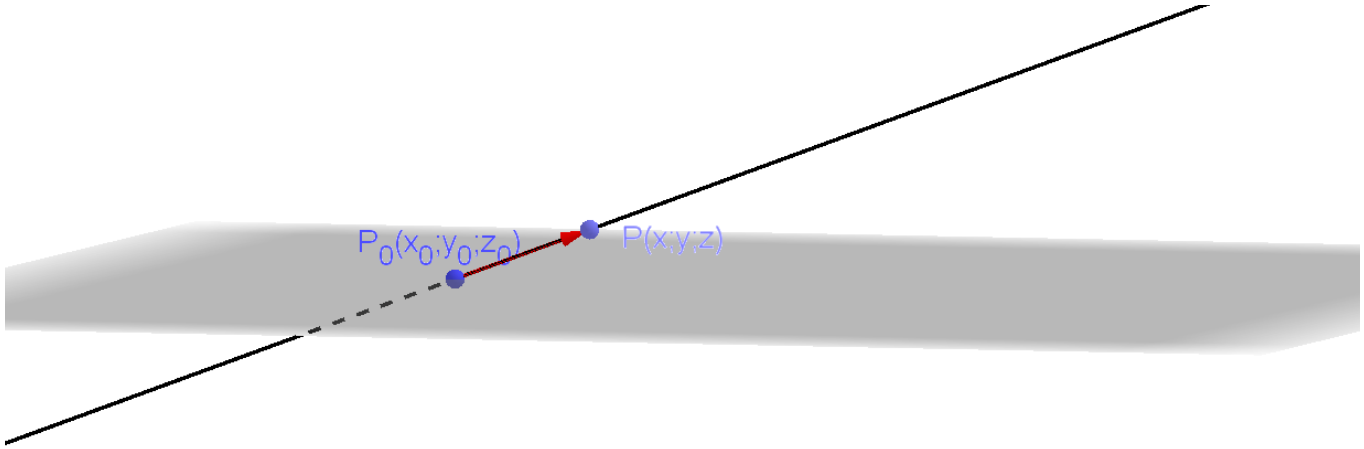
analoga a quella incontrata per la distanza tra un punto ed una retta sul piano

Quesito 6 esame 2017 straordinaria

In un sistema di riferimento cartesiano il piano π di equazione $3x - 4y - 22 = 0$ è tangente a una sfera avente come centro il punto $C(3;\, 3;\, 0)$. Determinare il raggio della sfera.



Equazioni di una retta nello spazio



Una retta è univocamente determinata da un suo punto $P_0(x_0;y_0;z_0)$ e da un qualunque vettore $\vec{v} = (l; m; n)$ parallelo alla retta.

Un generico punto P(x;y;z;) della retta individua un vettore $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ che risulta parallelo a $\vec{v}$.

Deve quindi valere la condizione di parallelismo tra due vettori:

$$\boldsymbol{\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}}$$ (**equazioni cartesiane della retta**)

Se indichiamo con un parametro il valore delle tre frazioni otteniamo:

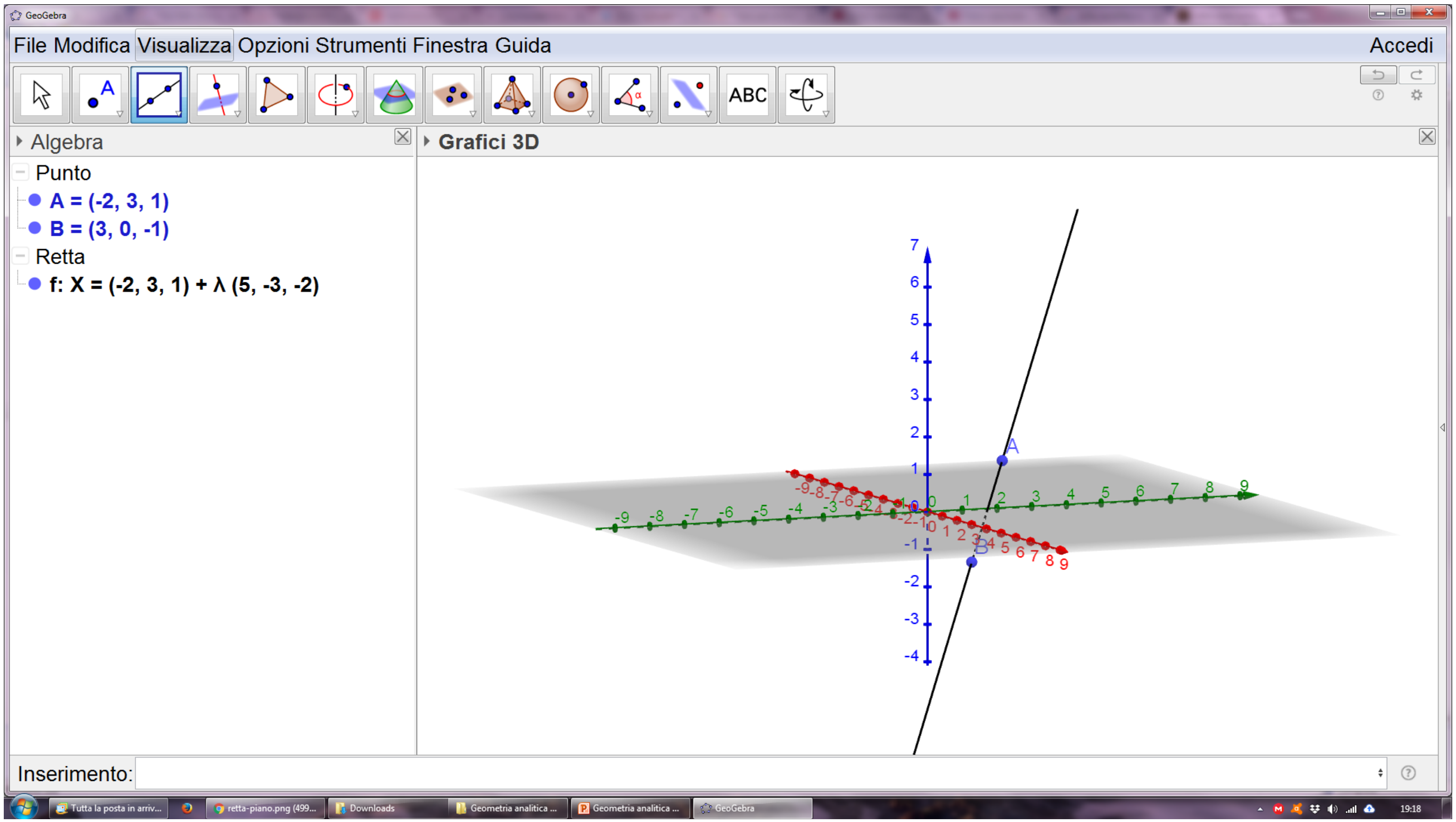
$$\boldsymbol{\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}}$$ (**equazioni parametriche della retta**)

l,m,n prendono il nome di **parametri direttori** della retta.

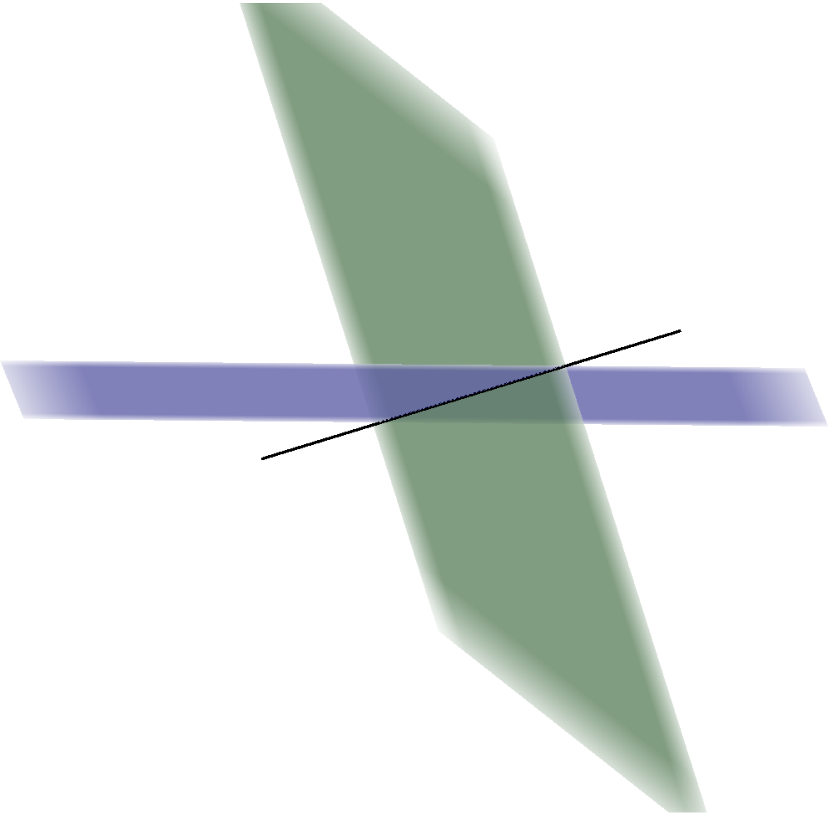
Notiamo che una retta nello spazio non è rappresentata da una sola equazione.

Quesito 5 esame 2017 ordinaria

Dati i punti $A(-2, 3, 1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(2, 2, -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B…



Equazioni di una retta



Una retta nello spazio è univocamente determinata anche dall'intersezione tra due piani:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Un fascio di piani che ha in comune una retta (detta **sostegno del fascio**) ha equazione:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

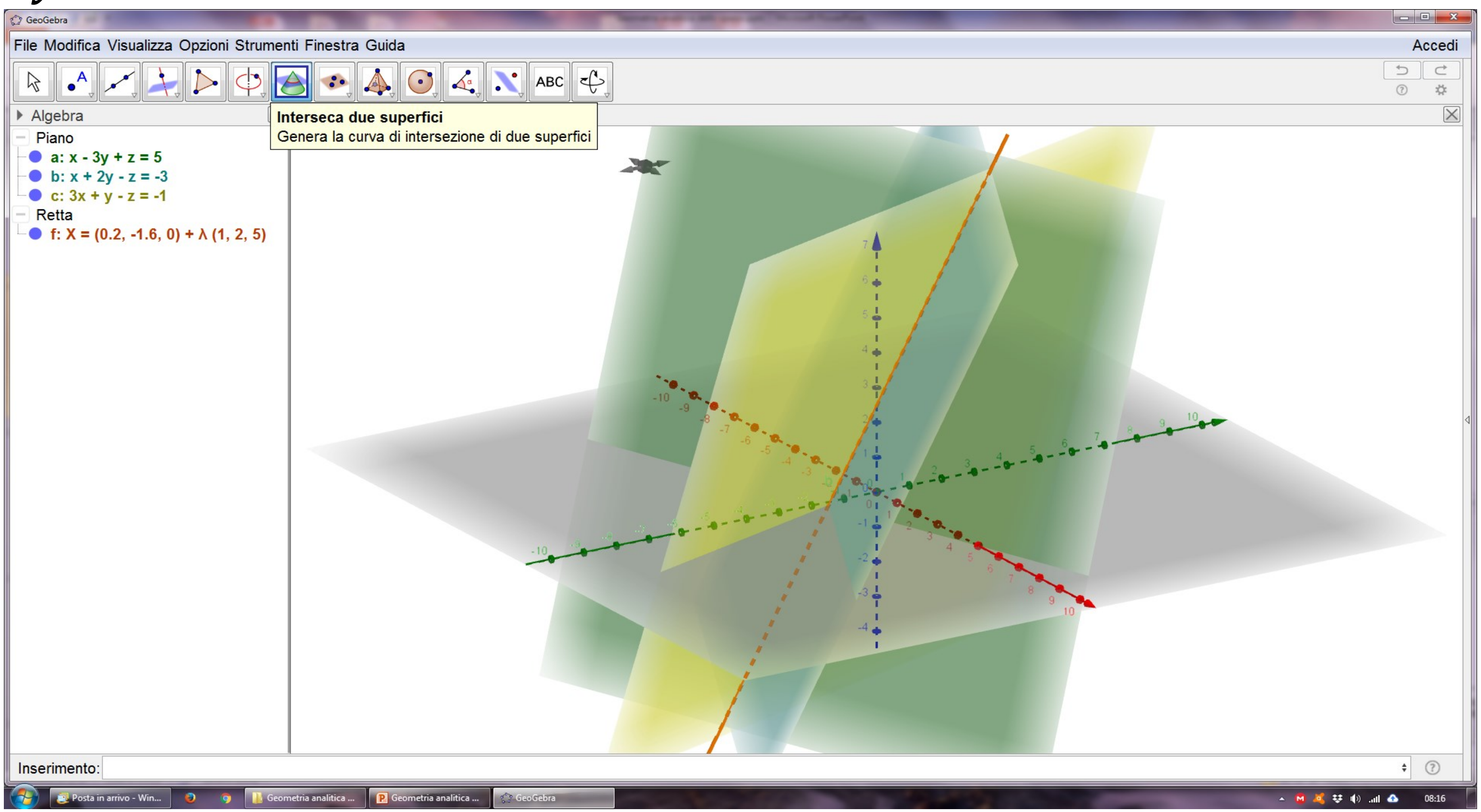
Quesito 4 esame 2015 straordinaria

Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:

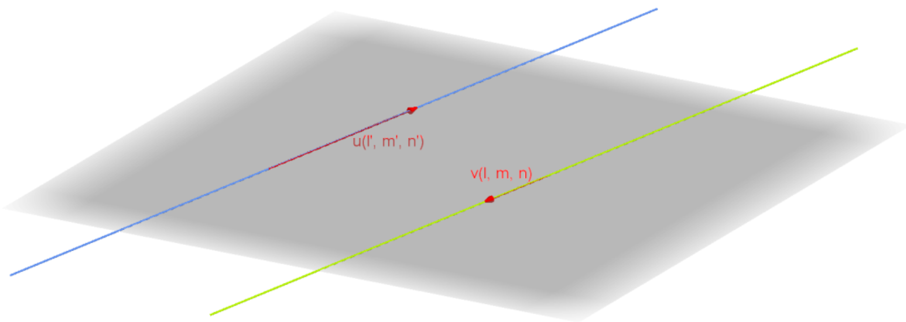
α) $x - 3y + z - 5 = 0$

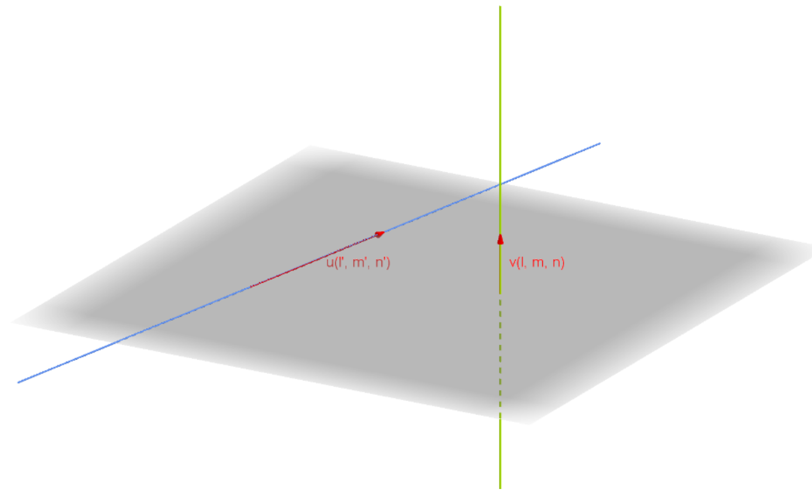
β) $x + 2y - z + 3 = 0$

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta *r* da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$.



Rette parallele e perpendicolari





condizione di parallelismo:
i vettori direzione sono paralleli

$$\frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}$$

comprende anche le rette coincidenti

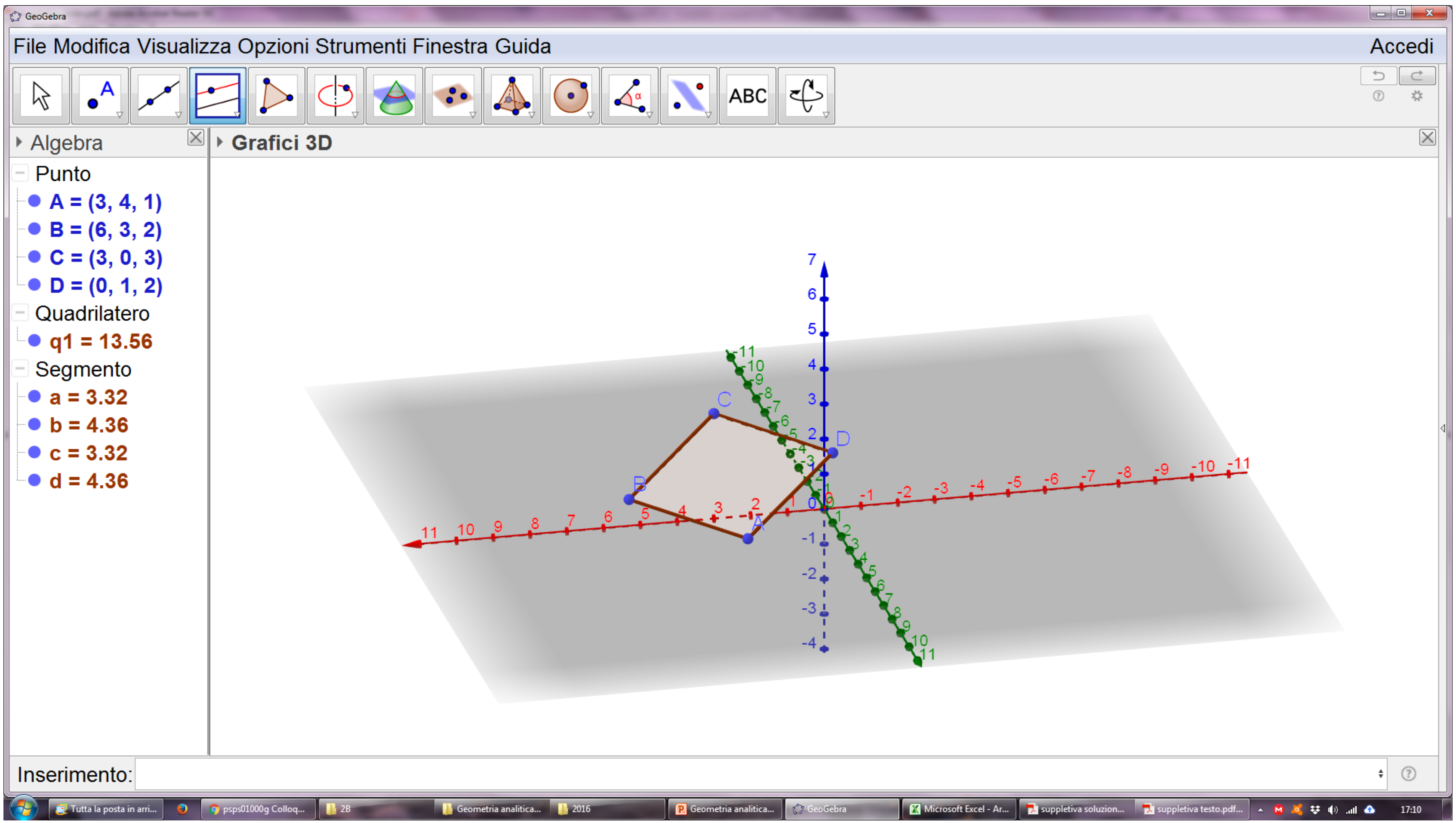
condizione di perpendicolarità:
i vettori direzione sono perpendicolari

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

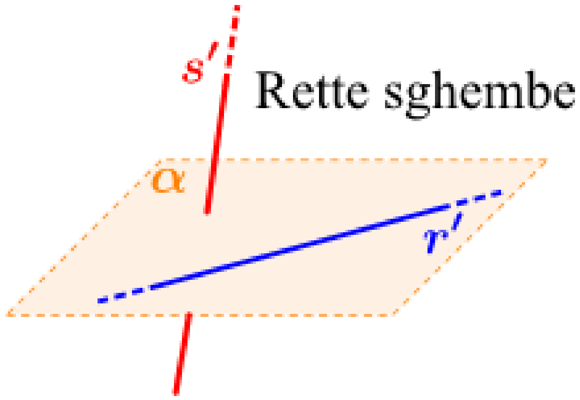
comprende anche le rette sghembe che hanno vettori perpendicolari (in questo caso le rette si dicono **ortogonali**)

Quesito 6 esame 2016 suppletiva

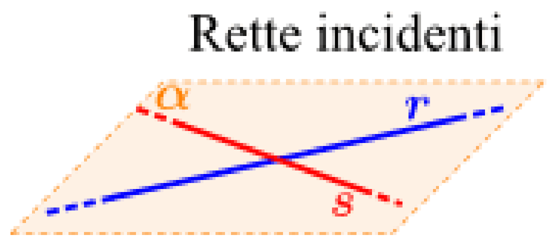
I punti A(3, 4, 1), B(6, 3, 2), C(3, 0, 3), D(0, 1, 2) sono vertici di un quadrilatero *ABCD*. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.



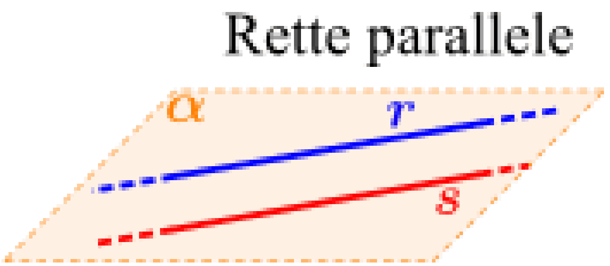
Rette incidenti, parallele, sghembe, coincidenti



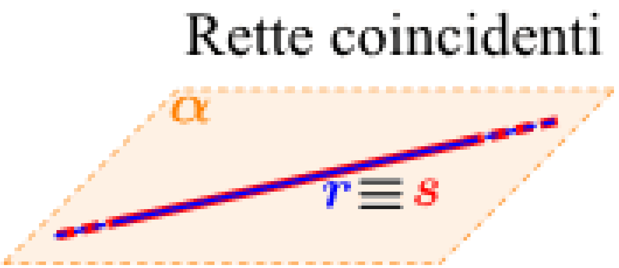
Il sistema tra le equazioni è impossibile;
i vettori non sono paralleli



Il sistema tra le equazioni ha una sola soluzione;
i vettori non sono paralleli



Il sistema tra le equazioni è impossibile;
i vettori sono paralleli



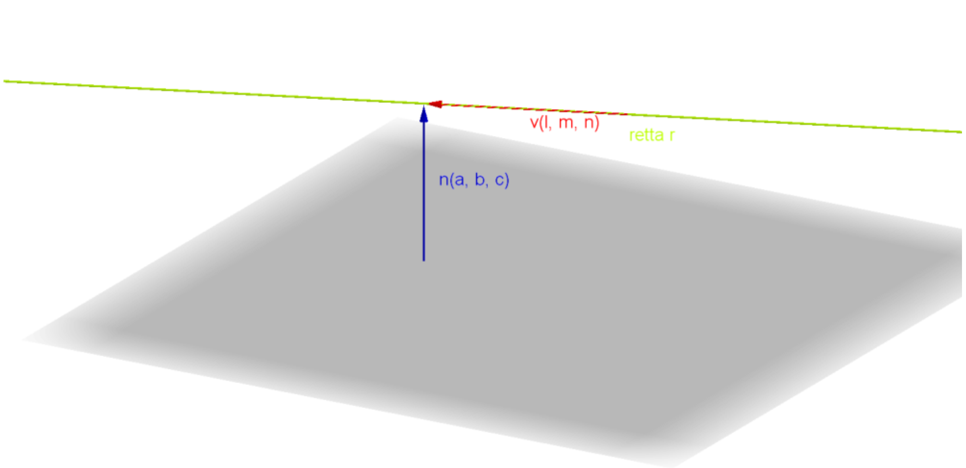
Il sistema tra le equazioni è indeterminato;
i vettori sono paralleli

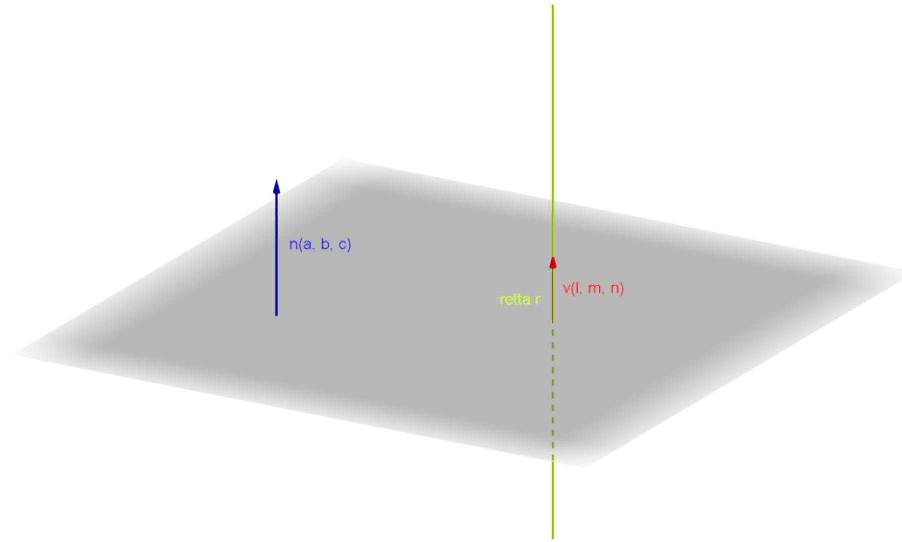
Approfondimenti:

- *[Posizione reciproca di due rette nello spazio]*
- *[Retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data]*
- Analizziamo alcuni quesiti d'Esame!

Rette e piani paralleli e perpendicolari

Dati un piano ax + by + cz + d = 0 e una retta di vettore direzione v(l, m, n)





condizione di parallelismo:
i vettori direzione sono perpendicolari

$$la + mb + nc = 0$$

comprende anche la retta che giace sul piano

condizione di perpendicolarità:
i vettori direzione sono paralleli

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Quesito 9 esame 2015 straordinaria

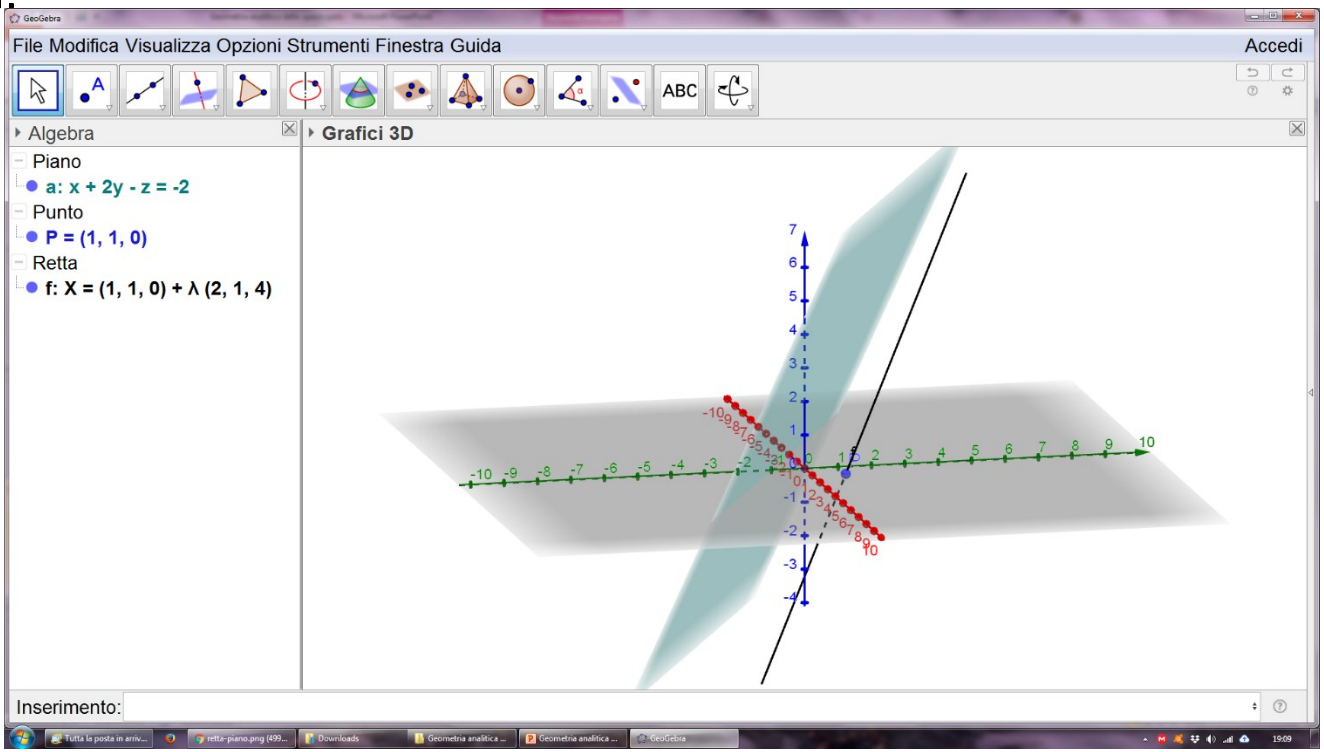
In un riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz*, data la retta *r* di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

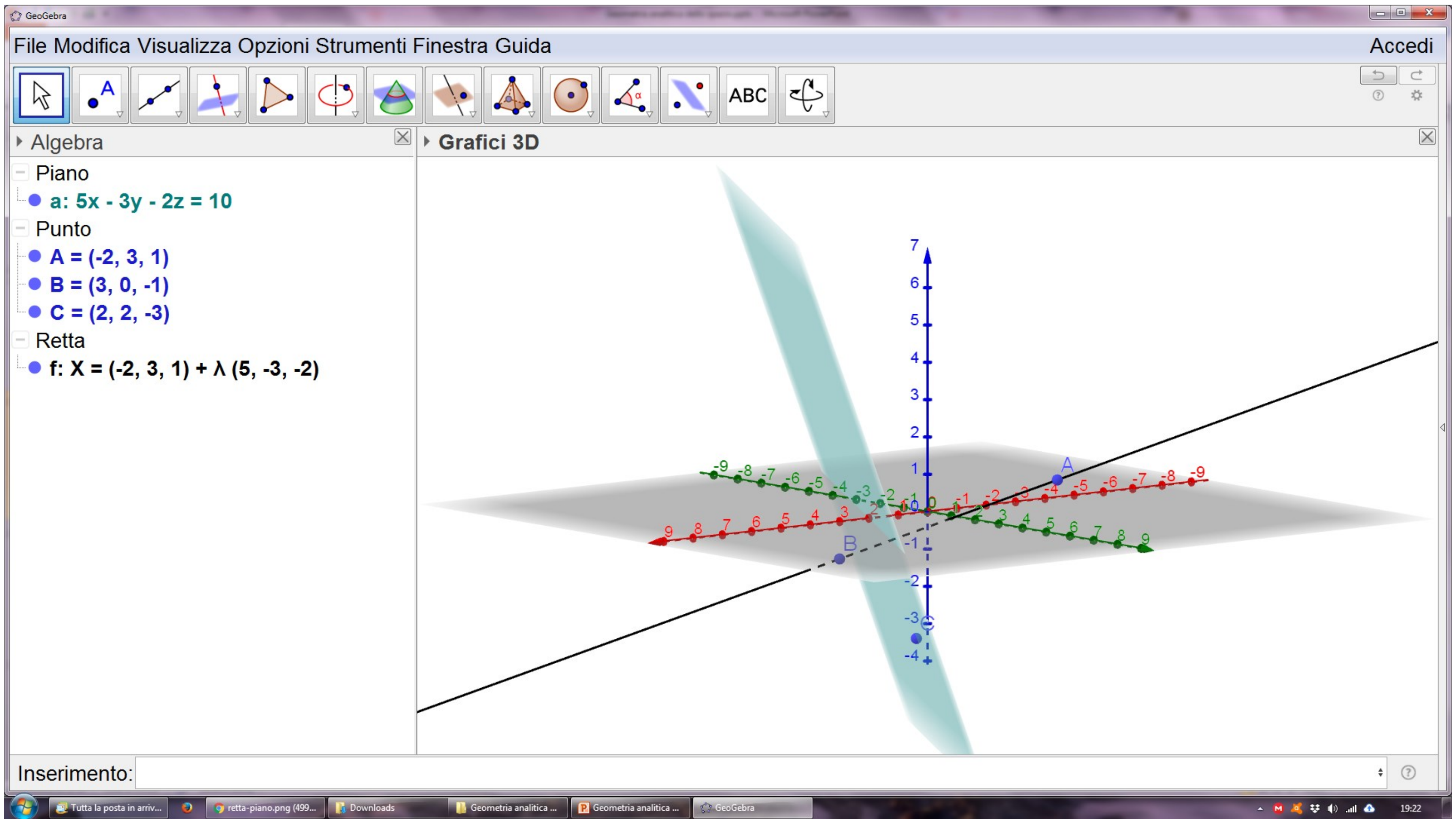
$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di *k* la retta *r* e il piano *P* sono paralleli, e la distanza tra di essi.



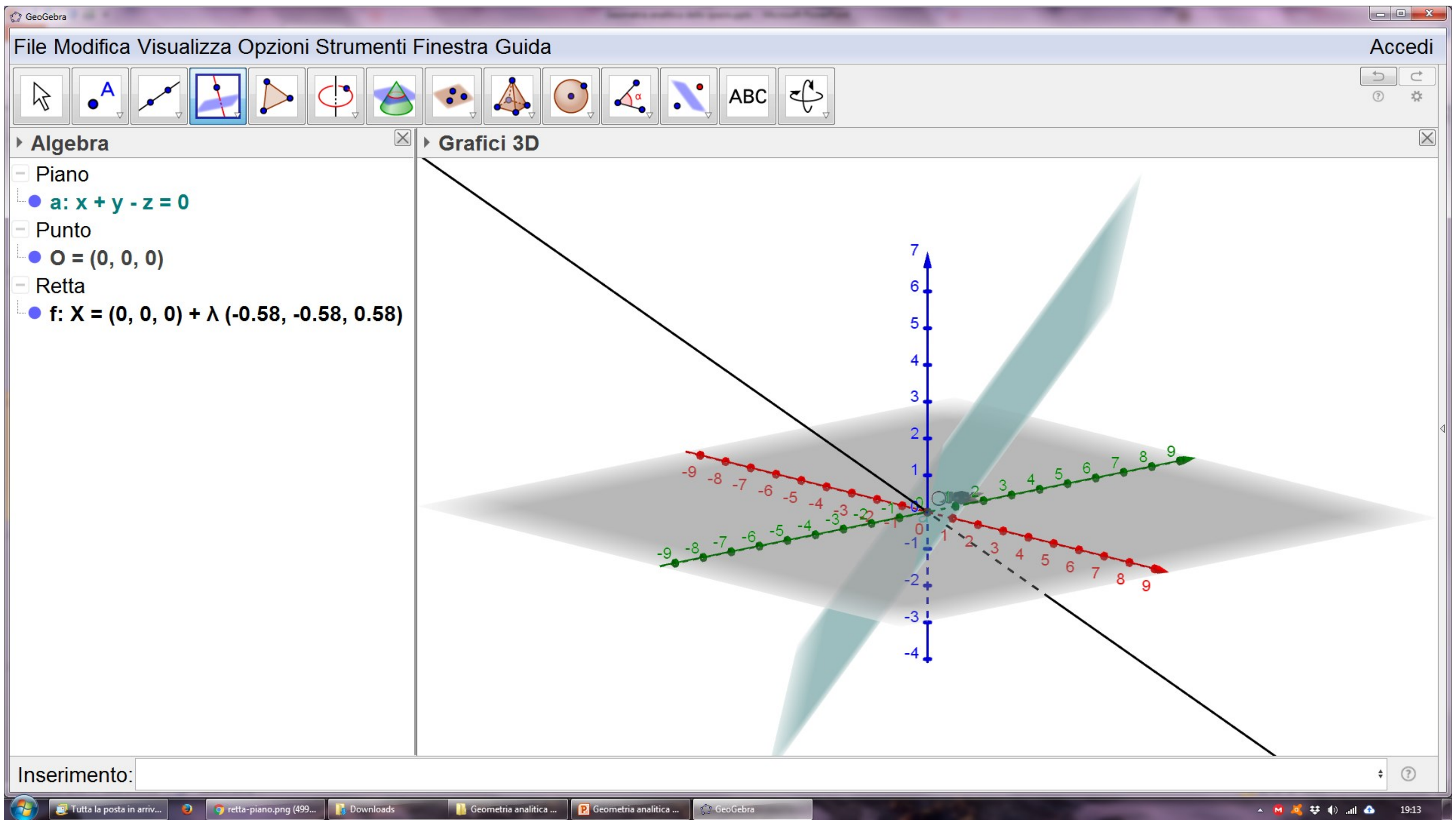
Quesito 5 esame 2017 ordinaria

Dati i punti $A(-2, 3, 1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(2, 2, -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

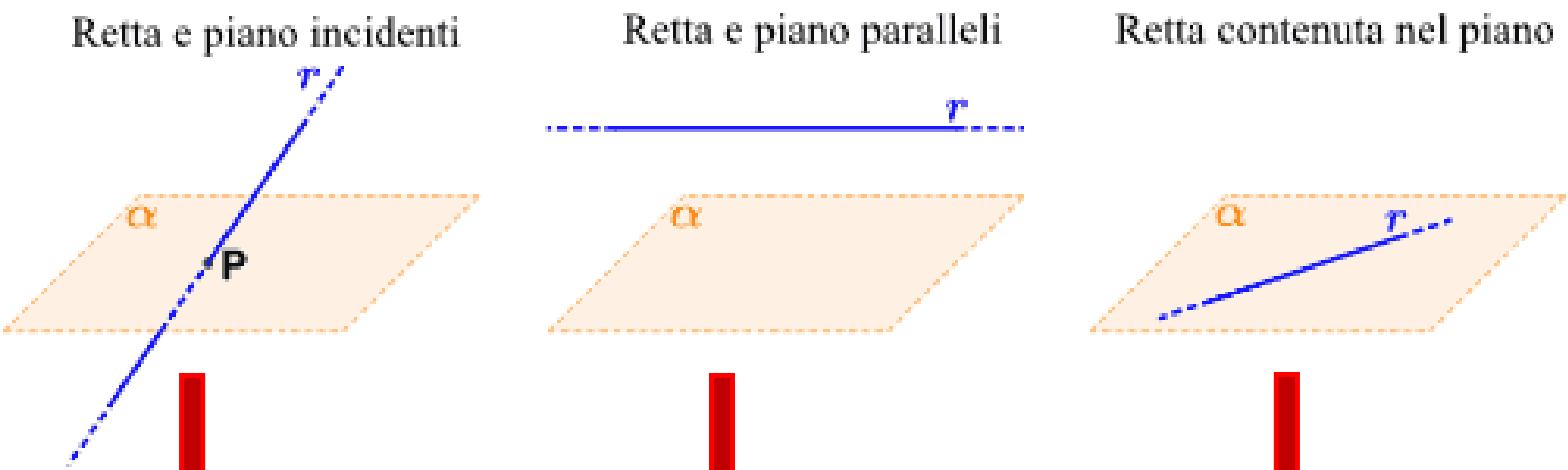


Quesito 5 esame 2015 ordinaria

Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.



Retta incidente, parallela, giacente

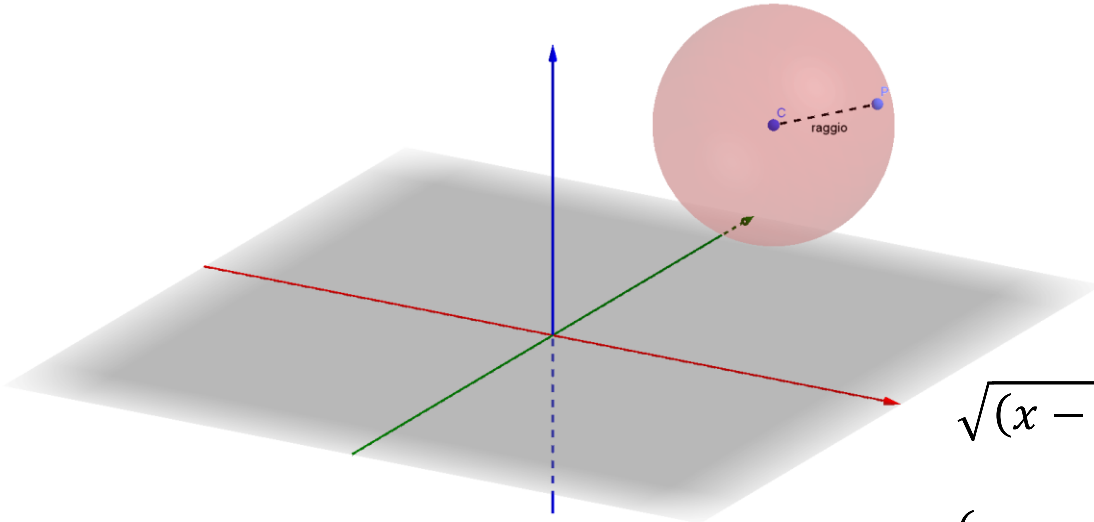


Il sistema tra le equazioni ha una sola soluzione;
i vettori non sono perpendicolari

Il sistema tra le equazioni è impossibile;
i vettori sono perpendicolari

Il sistema tra le equazioni è indeterminato;
i vettori sono perpendicolari

Superficie sferica



La superficie sferica è il luogo dei punti dello spazio che hanno una distanza dal centro pari al raggio. È l'equivalente nello spazio della circonferenza.

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r$$

quindi

$$\boldsymbol{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2}$$

(equazione noti il centro e il raggio)

Sviluppando i calcoli si arriva all'equazione cartesiana:

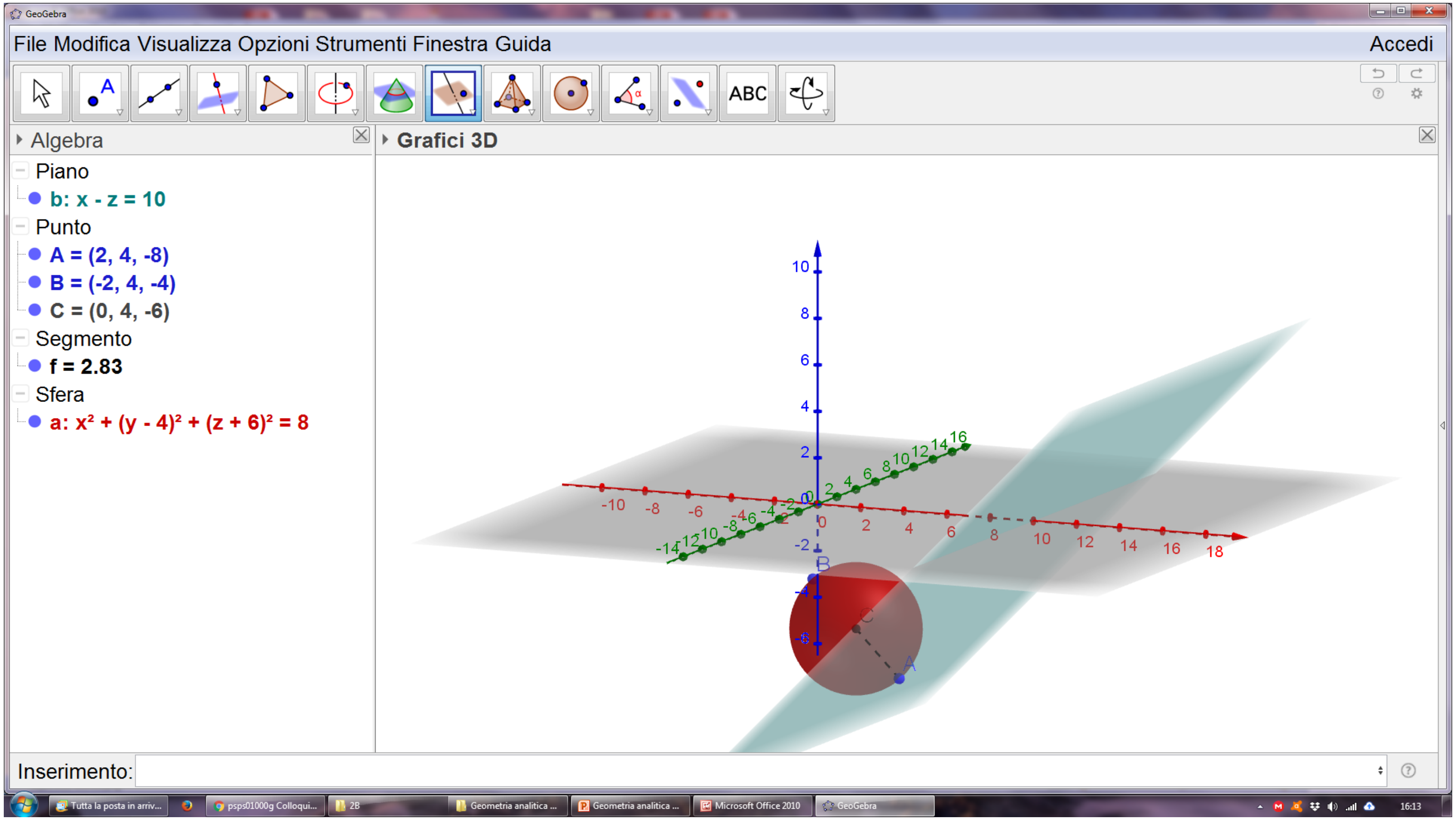
$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0}$$

Valgono per la superficie sferica formule analoghe a quelle della circonferenza nel piano:

$$\boldsymbol{C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)} \qquad \boldsymbol{r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{c}{2}\right)^2-d}}$$

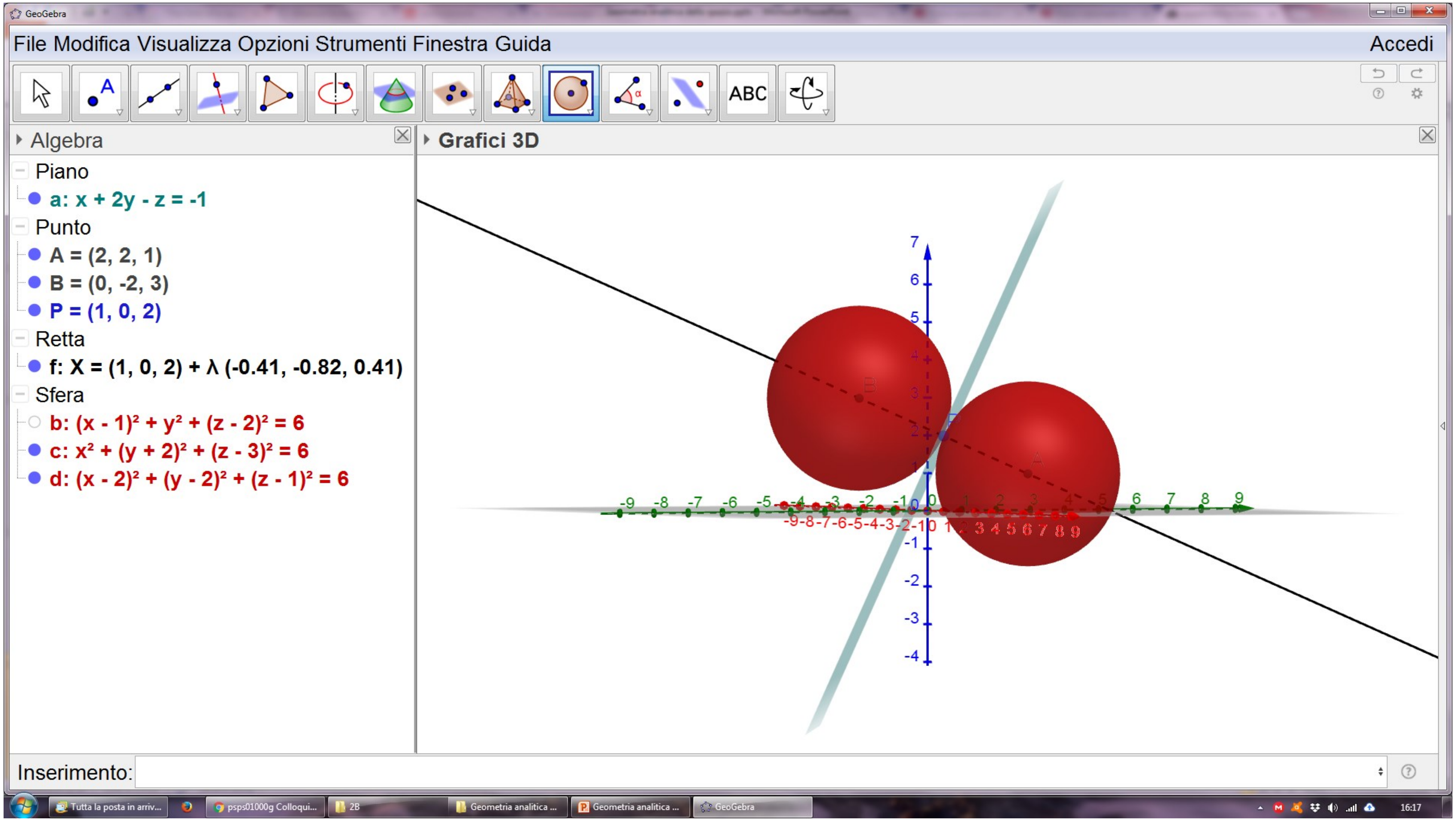
Quesito 4 esame 2016 straordinaria

Dati i punti $A(2, 4, -8)$ e $B(-2, 4, -4)$, determinare l'equazione della superficie sferica di diametro AB e l'equazione del piano tangente alla sfera e passante per A.



Quesito 7 esame 2017 ordinaria

Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio √6 tangenti al piano π di equazione $x + 2y - z + 1 = 0$ nel suo punto P di coordinate (1, 0, 2).

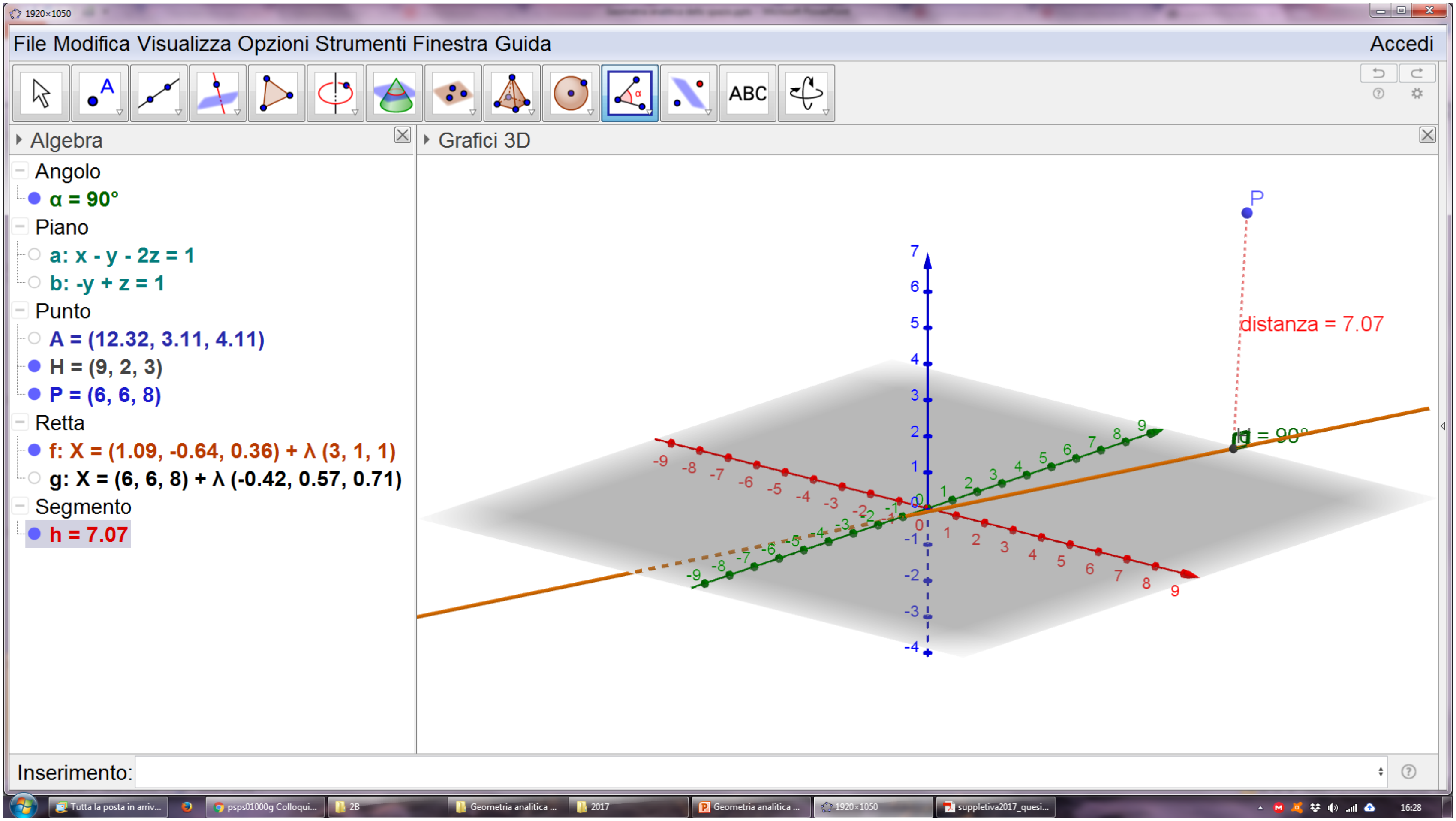


Altri Quesiti d‘Esame

Quesito 6 esame 2017 suppletiva

Determinare la distanza tra il punto $P(6, 6, 8)$ e la retta:

$$\begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

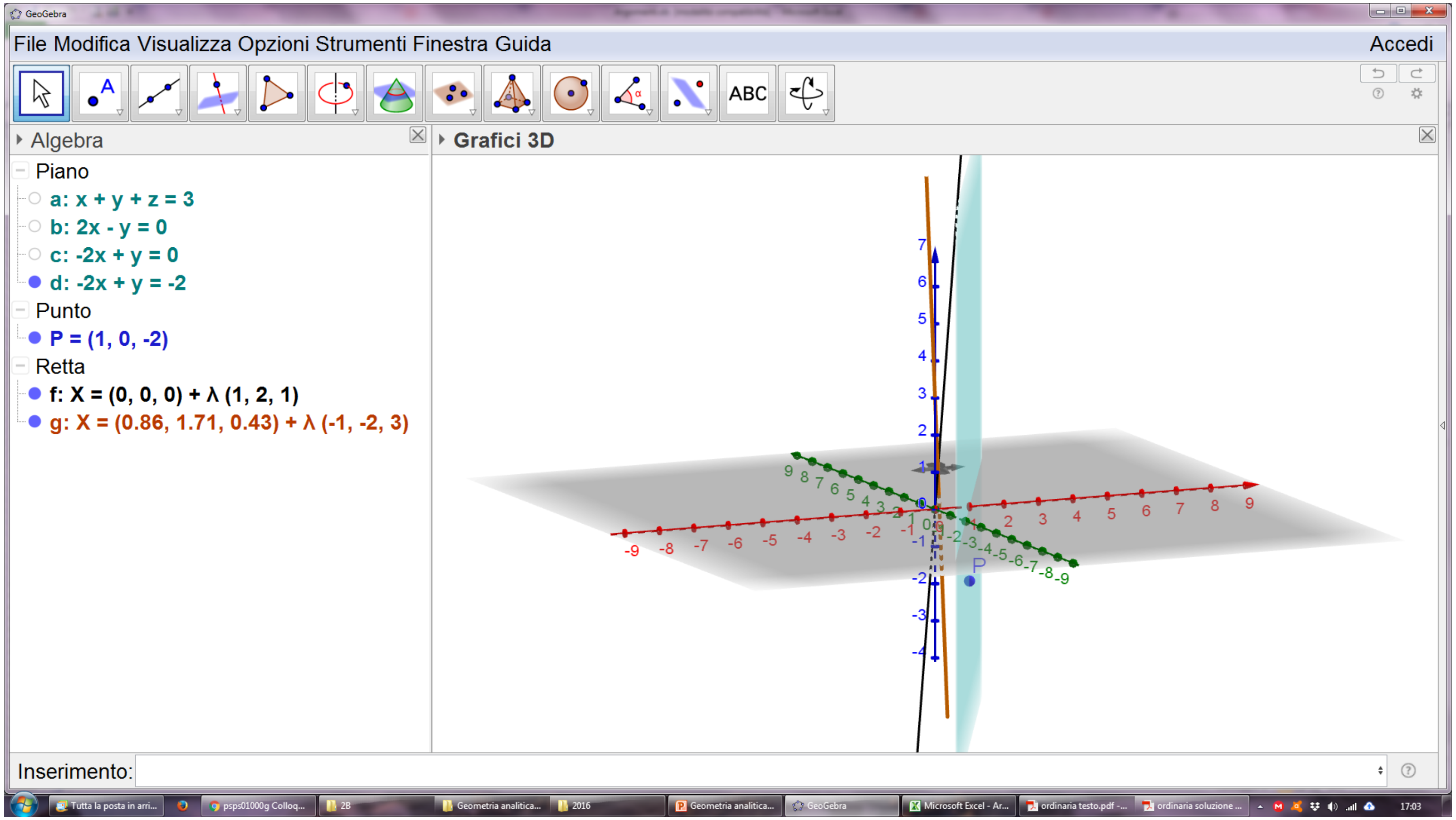


Quesito 9 esame 2016 ordinaria

Date le rette:

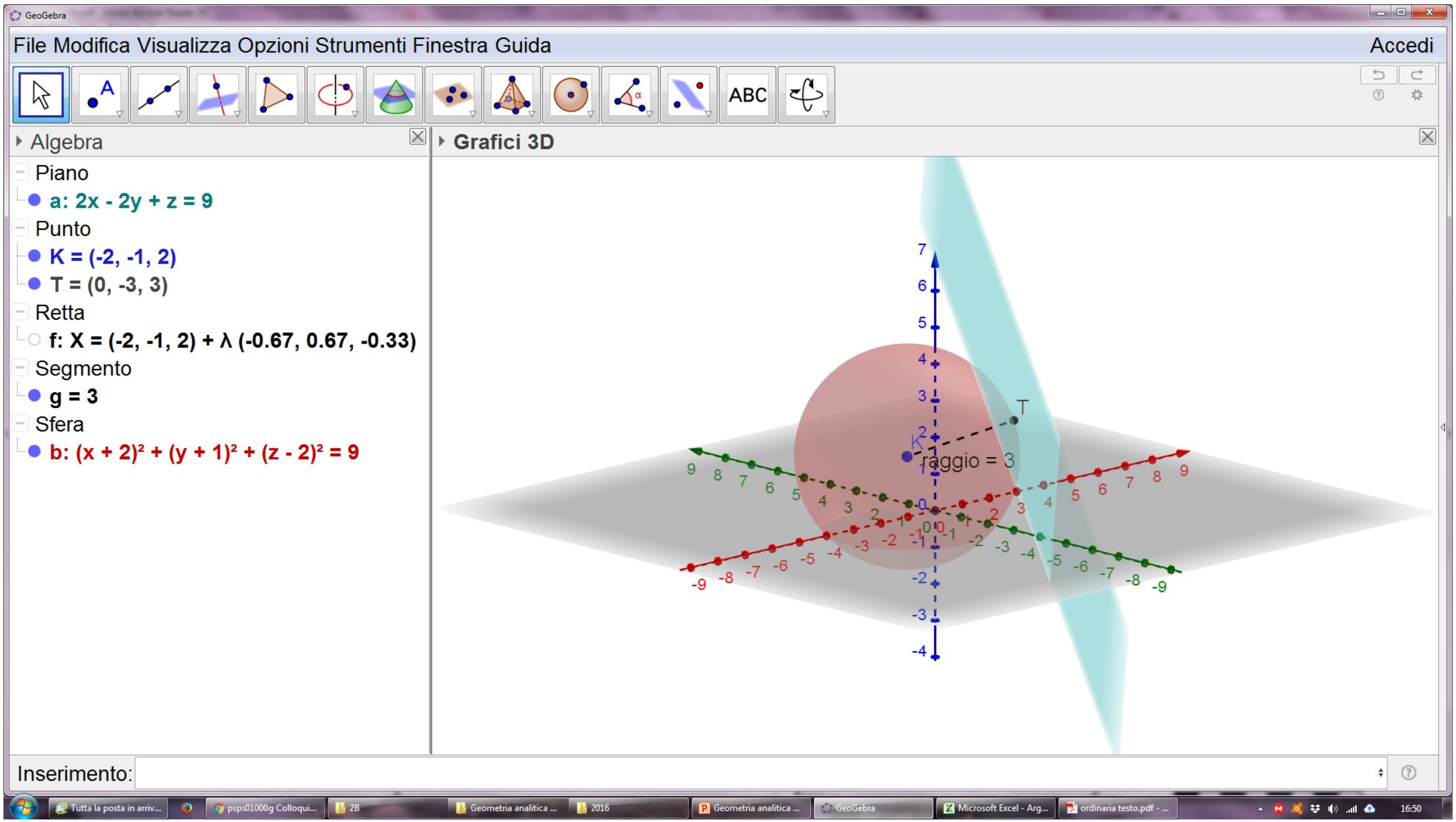
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P(1, 0, -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.



Quesito 5 esame 2016 ordinaria

Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2, -1, 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?



Quesito	Testo
N.9 esame 2016 straordinaria	Dati i punti $A(-2, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(0, -1, -2)$, $D(1, 1, 0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α.
N.7 esame 2016 suppletiva	Determinare la distanza tra il punto P(2, 1, 1) e la retta: $\begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$
N.2 esame 2017 suppletiva	Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto (1, 0, 3) al piano di equazione $3x + 2y - z = 0$.
N.8 esame 2017 straordinaria	Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto P di coordinate (1; 1; 0) al piano di equazione $2x - 2y + z = 0$.